LAS ANTINOMIAS LOGICAS Y SU POSIBLE SOLUCION

En el volumen V (1972) de este ANUARIO FILOSOFICO se ha publicado un trabajo que lleva el título «*La noción de paradoja y la autorreferencialidad*», cuyo autor es Don Emilio DÍAZ ESTÉVEZ. La tesis central demostrada en este artículo es que ni la teoría de los tipos es necesaria para la solución de las paradojas lógicas, ni la distinción entre más de dos niveles lingüísticos es necesaria para resolver las paradojas semánticas [1]. Estoy de acuerdo con este planteamiento y su exposición. En el siguiente breve artículo, sólo quiero añadir un argumento que puede apoyar y reforzar la demostración de DÍAZ ESTÉVEZ. El argumento es este.

La solución de las paradojas o antinomias lógicas ha de buscarse en una definición inequívoca y, por consiguiente, ampliación de los operadores cuantificadores; mientras que hasta ahora, los intentos de evitar y eliminar las dificultades se han movido casi exclusivamente en el campo de modificaciones de las *reglas del cálculo.*

Explicaré en seguida los términos técnicos, y procuraré restringirlos a un mínimo necesario, para hacer accesible e inteligible el contenido de la argumentación a personas cultas e interesadas de cualquier formación, aun no especializadas en lógica formal y matemática.

1. ANUARIO FILOSOFICO de la Universidad de Navarra, vol. V (1972), pág. 59, apartado 3.

Para entender y comprender la estructura de un sistema racionalmente inteligible —expresable en términos matemáticos o lógico-lingüísticos—, son necesarios tres requisitos: primero, un conjunto de *elementos* primarios; segundo, un conjunto de *operaciones* de enlace o conexión; tercero, un conjunto de *reglas del cálculo* o de la *gramática.*

En el caso de la matemática, los elementos son números, conceptos geométricos como puntos, líneas rectas, etc., vectores, tensores, spinores, matrices, etc; las operaciones de enlace o conexión son adición, substracción, multiplicación, división, diferenciación o derivación, igualdad, identidad, etc.; las reglas del cálculo o de las operaciones posibles se determinan necesariamente según las propiedades del conjunto de los elementos y las operaciones. Dos ejemplos: En el cálculo de números, vale la ley asociativa: $(a \, . \, b) \, . \, c = a \, . \, (b \, . \, c)$; en el cálculo de vectores, no. En el cálculo de números, vale la ley conmutativa: $a \, . \, b = b \, . \, a$; en el cálculo de matrices, no.

En el caso de la lógica, los elementos son proposiciones, a saber, enunciados que tienen sentido y pueden ser sometidos al juicio metalingüístico de verdad o falsedad; las operaciones de enlace o conexión son conjunción, disyunción, implicación, equivalencia, etc. y las *cuantificaciones* universal («para todos vale...») y existencial («para algunos vale...» o «al menos, para uno»); y las reglas del cálculo se dan según estos presupuestos.

Un *operador* es, pues, un signo, un símbolo o una señal que indica o enseña que hay que ejecutar una orden y un orden de operaciones de enlace. Por ejemplo, el operador + da la orden de sumar; y muchas de tales adiciones sucesivas se ordenan con el operador Σ (la letra griega sigma mayúscula). En la lógica formal, la operación correspondiente es la conjunción, cuyo operador se escribe $\wedge$; y la conjunción total («para todos») se designa con el operador o cuantificador $\bigwedge$ (el tipo mayúsculo del operador que señala la conjunción; sigo aquí el simbolismo de Paul LORENZEN [2] que me parece más lógico que los anteriores).

Con tales preliminares podemos ahora añadir la antinomia de Bertrand RUSSELL, la más famosa entre las que surgieron en este siglo.

En el artículo al que nos referimos, DÍAZ ESTÉVEZ cita el texto original de *Principia Mathematica* [3]. El sentido, traducido a un lenguaje comunmente inteligible, es el siguiente:

Podemos formar el concepto del *Conjunto de todos los conjuntos que no se contienen o envuelven en sí mismos,* que no se abarcan a sí mismos. O expresado en otras palabras, que dicen lo mismo: Podemos formar el concepto de la *Clase de todas las clases que no son miembros o elementos de sí mismos.*

Entonces, se levanta la pregunta: Este mismo *Conjunto de todos los conjuntos,* o esta misma *Clase de todas las clases,* que *no* son elementos de sí mismos, *¿es elemento de sí mismo o no?*

La contestación a la pregunta es clara: Hay dos posibilidades, y sólo dos: O bien el Conjunto de todos los

2. La explicación de los símbolos más importantes se encuentra en la obra de Paul LORENZEN, *Einführung in die operative Logik und Mathematik* (Introducción a la Lógica y Matemática operacional), Ed. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955, página sin número ante la introducción (página 1). El contenido de este libro ha atribuido mucho a la concepción de este artículo sobre las antinomias.

La correspondencia entre la conjunción lógica y la suma aritmética se debe a la igualdad significativa del operador "y" ("*et*" en latín y francés, "*and*" en inglés). Si convencionalmente se designa como "suma lógica" la disyunción (y la conjunción como "producto lógico"), esto se debe a la derivación de la Lógica formal a partir de la estructura matemática de los retículos de George BOOLE: la conjunción es isomorfa (estructuralmente igual) al conjunto de intersección, y la disyunción es isomorfa al conjunto de unión.

3. ANUARIO FILOSOFICO de la Universidad de Navarra, vol. V (1972), pág. 66. El texto original en inglés es el siguiente: "Let w be the class of all those classes which are not members of themselves, Then, whatever class x may be, "x is a w" is equivalent to "x is not an x". Hence, giving to x the value w, "w is a w" is equivalent to "w is not a w" ". WHITEHEAD-RUSSELL, *Principia Mathematica,* Cambridge (University Press), 1962, pág. 60 (Introduction, Chapter II: The Theory of Logical Types, VIII. The Contradictions).

conjuntos que *no* se contienen en sí mismos, es elemento de sí mismo, o bien no lo es.

Si es elemento de sí mismo, no puede serlo, porque según la definición o condición primera: «los conjuntos que no son elementos de sí mismos», se excluye categóricamente.

Pero, por otra parte, si *no* es elemento de sí mismo, debe abarcarse a sí mismo; porque de lo contrario, según la definición o condición de «*todas* las clases que *no* se contienen en sí mismas», quedaría fuera un miembro legítimo de la «Clase de todas las clases que *no* son miembros de sí mismas»; precisamente esta misma Clase que cumple la condición de que «*no* es elemento de sí misma». Esta segunda conclusión es falsa, porque es falsa la interpretación unívoca del operador «*para todos*», que en verdad *tiene un sentido ambiguo y equívoco.*

Para entender mejor este doble sentido, vale una expresión en fórmulas lógicas de la antinomia de RUSSELL. No es necesaria para la inteligencia la formalización simbólica, pero facilita la comprensión sinóptica.

La fórmula se escribe así:

$$\mathrm{V}\ C\ \Lambda\ c \quad (c \in C \equiv \overline{c \in c}) \qquad \ldots (1)$$

La fórmula se lee así:

«Existe un Conjunto C de todos los (sub-)conjuntos c (que cumplen la condición de que) cualquier subconjunto c es elemento del Conjunto total C solamente si c *no* es elemento de sí mismo».

(Dicho entre paréntesis: Para lograr mayor claridad sinóptica, hemos mezclado aquí varias nomenclaturas del simbolismo lógico-formal; a saber, en la designación del operador existencial V (existe al menos un...) y del operador universal (para todos...) Λ sigo la propuesta de Paul LORENZEN [2], porque es la más clara y lógica: la existencia lógica es una generalización de la disyunción, que es verdad si por lo menos uno de sus componentes es verdad; y la universalidad lógica es una generalización de la conjunción, que es verdad si y sólo si todos sus miembros son verdad. El símbolo de la igualdad definitoria o equivalencia $\equiv$ es el mismo como en los *Principia Mathematica* de RUSSELL-WHITEHEAD. El signo de la negación, por fin, una barra por encima de la fórmula negada, fue introducido por la escuela de Münster (Alemania): HERMES-SCHOLZ).

Podemos proceder ahora a la formulación de la antinomia:

$$\bigvee C \quad (C \varepsilon C \equiv \overline{C \varepsilon C}) \qquad \ldots (2)$$

Dicho en palabras: «Existe un Conjunto o una Clase C que es elemento o miembro de sí mismo y *no* lo es, a la vez».

Ahora nos quedan pocos pasos para demostrar que esta expresión no es una antinomia en el sentido de que se pueda comprobar tanto su validez como su no-validez, sino que abarca simple y sencillamente una *contradicción,* y por tanto se reduce a lo *absurdo.* Esta fue la tesis en el artículo citado de DÍAZ ESTÉVEZ [4], y tan sólo puedo y quiero añadir aquí la explicación de que la *contradicción resulta de una ambigüedad o equivocación en el uso del operador o cuantificador «para todos».*

En el caso de la fórmula ... (1), el operador o cuantificador *«para todos»* tiene un *sentido puramente numérico y sumativo:* Tomamos el primer conjunto c_1, el segundo c_2, y así sigue hasta el último de los conjuntos que encontramos con una cierta propiedad que los caracteriza y define (por ejemplo, el ser bosques). En el formalismo de Paúl LORENZEN, este procedimiento resulta muy diáfano e instructivo:

$$c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_n \equiv \bigwedge c \equiv C \qquad \ldots (3)$$

La fórmula ... (3) se lee: «Esta clase, y aquella clase, y la siguiente clase hasta la última clase que cumple una

4. ANUARIO FILOSOFICO de la Universidad de Navarra, vol. V (1972), págs. 66-71.

cierta condición definitoria, pueden comprenderse en una totalidad formada como la suma de todas las clases anteriormente citadas». La fórmula ... (3) significa muy bien que *la Clase total* (simbolizada con C mayúscula) *no* puede contenerse en sí misma; porque lo que no aparece a un lado del signo de equivalencia $\equiv$, tampoco puede aparecer al otro lado. Volviendo al ejemplo concreto: La totalidad de todos los bosques en el mundo no es un bosque, y por tanto, no se abarca a sí misma.

En este primer sentido, el operador «para todos» —el símbolo Λ— dice exclusión del Conjunto total (con mayúscula) que representa; es excluyente de sí mismo.

Por tanto, no es posible proceder a partir de la fórmula correcta (bien formada) ... (1) a la evidente contradicción ... (2), porque el mismo sentido del operador «para todos» como *excluyente de sí mismo* lo prohibe.

Pasamos ahora a otro sentido posible del operador equívoco «para todos». Sin duda alguna, existen también *clases que se contienen en sí mismas.* (El negarlo, es el «pecado original» de la teoría de los tipos de Bertrand RUSSELL). Por ejemplo, el conjunto de todos los conceptos abstractos es, asimismo, un concepto abstracto; y debe abarcarse a sí mismo.

Otro ejemplo: Todas las comunidades humanas —ciudades, pueblos, naciones, razas y así sigue— forma el Conjunto de la Humanidad; y la Humanidad misma es una Comunidad humana; luego, es miembro de sí misma. Tercer ejemplo: Todos los sistemas estelares —los sistemas solar-planetarios, las galaxias, las nebulosas— forman en su Conjunto total el Universo; pero el Universo es también un sistema de estrellas, y por esta misma razón, se abarca a sí mismo.

Estamos ahora en un nivel puramente lógico, no aritmético como en el análisis del primer sentido del operador «para todos». No interesa ahora el número de hombres individuales que entran en la Humanidad entera de hoy, no interesa el número cósmico de estrellas fijas que hay en el Mundo (del orden de magnitud de 10^{22}), sino se trata del orden lógico de clases y clases de clases. Entonces, no es necesario que la «Clase total de todos los sistemas estelares» abarque el mismo número de estrellas individuales que componen el universo real, porque puede haber coincidencias (conjuntos de intersección: estrellas que pertenecen a un sistema y a otro), y sobre todo, el sistema total (el Universo) contiene lógicamente a sí mismo (en este segundo sentido, es «Universo más Universo»), pero, desde luego, no en el primer sentido —puramente numérico— del cuantificador «para todos».

Es necesario, pues, la introducción de un segundo sentido del operador «*para todos*», que signifique «*incluyente de sí mismo*», es decir, que en virtud y por la fuerza determinante del mismo operador para todos, se puede formar un nuevo conjunto o una nueva clase que no existía antes de la totalización o formación del «Conjunto de todos los conjuntos que cumplan tal condición».

Para expresar simbólicamente este segundo sentido del operador «para todos», quisiera proponer el «A invertido» que usa Stephen C. KLEENE en su «*Introduction to Metamathematics*». El origen del «A invertido» es claro: la letra inicial de «*all*» en inglés, de «*alle*» en alemán.

El cuantificador universal $\forall$ que incluye la Clase que produce puede emplearse si y solamente si la condición comprensiva lo permite y exige, esto es, si vale la fórmula:

$$\exists S \ \forall x \ (P(x) \rightarrow S \in S) \qquad \dots (4)$$

Esta fórmula se lee así: «Existe un Conjunto (en inglés: *Set*) S que abarca a *todos* los elementos x que cumplen la definición o condición: «x tiene la propiedad P» (o lo que dice lo mismo: «x pertenece a clase de los P»), condición que implica (o lleva consigo, conlleva) que S es miembro o elemento de S».

Expresado en uno de los ejemplos que acabamos de citar:

«Existe un Conjunto S de todos los elementos x que son conceptos abstractos, y esta condición implica que S es elemento de S, o lo que dice lo mismo: que la Clase S contiene a sí misma».

Pero las cosas no paran aquí. Hay, además, un *tercer sentido o significado* del cuantificador universal, diferente de los dos primeros mencionados. Esta diferenciación se expresa en todos los idiomas indoeuropeos que conozco con la distinción entre la expresión «*todos unidos o en conjunto*» y la expresión de «*cada uno*» o «*cada cual*». (En inglés: *every, each, any;* francés: *chaque;* italiano: *ogni;* portugués: *cada um, cada qual;* alemán: *jeder, jede, jedes;* ruso: *kaschdyi, vsjakij*). Acaso encubre al problema el hecho de que en castellano «*todo*» y «*todos los*» se usa casi como sinónimo de «*cada*»; en francés «*tout*» y «*tous, toutes*»; en latín: «*omnis, omnes*»; en griego: «*pan, pasa*» y el plural «*pantes, pasai, panta*». Pero la distinción lógica es clara. Enseñada en un sencillo ejemplo: Un campesino tiene tres caballos y un carro. Si dice: «*Todos* los caballos pueden arrastrar el carro», es totalmente otra cosa que afirmar: «*Cada* uno de mis caballos es capaz de arrastrar el carro».

Propongo usar como símbolo de este tercer significado del cuantificador universal el sencillo poner entre paréntesis la variable x (del modo como se designa el cuantificador universal en los *Principia Mathematica* de WHITEHEAD-RUSSELL, en CHURCH, HILBERT-ACKERMANN-BERNAYS, QUINE y ROSSER). El símbolo (x) significa entonces: «Para cada x vale...».

Este tercer significado del operador universal tiene una aplicación muy interesante e importante en la aritmética o teoría de los números. Sin duda alguna, existe *cada número* n, y tiene su sucesor n + 1. Pero, por esta misma razón, *no* existe un conjunto de *todos los números;* porque si existiese, sería finito, y permitiría y exigiría su continuación: N más uno, N más dos... De esta manera, se evitan y superan muy clara y fácilmente las antinomias aritméticas, las de BURALI-FORTI y de Georg CANTOR, a saber, la afirmación de que existe y no existe, a la vez, un número ordinal o cardinal mayor que todos. Confieso aquí abiertamente mi adhesión al «intuicionismo» de Luizen Egbertus Jan BROUWER, de Arend HEYTING, de Hermann WEYL, sobre todo. Reconozco la importancia de la teoría de los conjuntos transfinitos de Georg CANTOR (con sus antecedentes en las «Paradojas de lo infinito» de Bernard BOLZANO), para arrojar alguna luz sobre las distintas potencias de la infinitud interior del continuo de los números algebráicos, de los reales, de las funciones dadas en un intervalo real, etc. ... Pero además de esta importancia constructiva —pura y mera construcción humana—, niego que los conjuntos transfinitos tengan existencia matemática.

La significación que hemos atribuido al operador cuantificador universal «para todos» en un sentido restringido, esto es, *excluyente de sí mismo,* puede interpretarse también como «*válido para todos los otros o todos los demás conjuntos o individuos*». El conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, se excluye a sí mismo, por las razones lógicas que acabamos de explicar. Por tanto, este cuantificador que hemos simbolizado como «Conjunción total» C = Λ x reúne todos los elementos x que son *otros,* que son *diferentes* de C, y *excluye* el mismo Conjunto o la misma Clase C.

Esta aclaración es capaz de eliminar otras formas conocidas de antinomias lógicas o, con más precisión, *sintácticas.* Pensamos en la antinomia —citada también en los *Principia Mathematica* de WHITEHEAD-RUSSELL[5]— de la relación T entre dos relaciones R y S, si R no tiene la relación R a S. Pensamos también en las formas más populares, cuyo prototipo es el barbero del pueblo que afeita a todos los habitantes del pueblo que *no* se afeitan a sí mismos. El dilema de si el barbero afeita a sí mismo o no, ahora se resuelve fácilmente: El barbero afeita a *todos los otros* (a *todos los demás:* operador Λ) vecinos del pueblo; y a sí mismo: como quiera (porque el operador Λ no le obliga a nada)[6].

5. WHITEHEAD-RUSSELL, *Principia Mathematica,* Cambridge, 1962, pág. 60. Si se inserta el sentido de "*todas las otras* relaciones (*diferentes* de la relación T)", la antinomia desaparece.

6. Cfr. la explicación en DÍAZ ESTÉVEZ, *La noción de paradoja...,* ANUARIO FILOSOFICO de la Universidad de Navarra, vol. V (1972), págs. 67-71.

Pero más aún: No sólo las antinomias sintácticas, sino también (por lo menos, gran parte de) las antinomias *semánticas* se solucionan precisando y distinguiendo el significado del operador «para todos». (La distinción entre antinomias sintácticas y semánticas —introducida por RAMSEY y desarrollada por LESNIEVSKI y TARSKI— dice que las primeras contienen solamente términos lógicos como proposiciones, clases, relaciones, etc., mientras las semánticas incluyen también juicios sobre tales afirmaciones (en un «metalenguaje») como: «es verdad que...»)[7].

Para citar tan sólo un ejemplo de una antinomia semántica, iré a mencionar el famoso «mentiroso», conocido ya desde la antigüedad. Epimenides, un cretense, dice que los cretenses siempre dicen mentiras. Entonces, su propia afirmación es mentira; si es mentira, los cretenses dicen la verdad; si es verdad lo que dice Epimenides, el cretense, todas las frases que dice un cretense son mentiras, y así sigue...

Aplicando el operador Λ que dice: «todas *las otras* o todas *las demás*...», se puede precisar fácilmente lo enunciado: «Epimenides, el cretense, dice: 'Todas *las otras* afirmaciones que pronuncia un cretense son falsas o mentiras, salvo o excepción hecha de esta misma afirmación mía que acabo de decir. Por tanto, no tengáis confianza en las palabras de un cretense...' ».

No nos referimos aquí a formulaciones de aparentes antinomias semánticas que en verdad no son antinomias por carecer totalmente de sentido, por la *circularidad* en sentido estricto (que es más que la pura *autorreferencia;* véase DÍAZ-ESTÉVEZ, loco citado[8]). La forma verbal «*pseú-*

7. Para más informaciones, véanse los manuales: I. M. BOCHENSKI, *Historia de la Lógica formal*, edición española de Millán Bravo Lozano, Ed. Gredos, Madrid 1966, págs. 403-417; y sobre todo: Evert W. BETH, *The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Science*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1965, págs. 481-518.

8. ANUARIO FILOSOFICO de la Universidad de Navarra, vol. V (1972), págs. 72-73. "Circularidad" en sentido estricto es "la cualidad de una proposición que habla de sí misma y sólo de sí misma"; mientras "circularidad en sentido amplio" o "autorreferencia" es "la cua-

domai» («digo mentira»), no dice nada, si no se refiere a otra proposición. Si en un libro se indica, en el índice de errores o erratas: «La frase que está en la página 100, línea 10, es falsa»; y en esta misma página 100, línea 10 se lee la única frase: «Esta frase es falsa»: no sigue nada, porque la frase: «Esta frase es falsa» *no* tiene sentido alguno, si *no se refiere a otra frase.*

Sería muy interesante entrar aquí en una discusión con otros intentos de superar las antinomias lógicas *rectificando y ampliando el simbolismo de la misma lógica formal.* La brevedad prometida al comenzar este artículo prohibe entrar en detalles. Lo esencial es que nuestra explicación parte de la insuficiencia lógica de los operadores *cuantificadores,* mientras que los anteriores intentos buscan modificaciones en las *reglas del cálculo,* que lógicamente dependen de la índole de los elementos y sus propias operaciones de enlace y, por tanto, de los operadores.

La más antigua y famosa empresa en esta dirección —conocida ya desde 1910, el año de la primera publicación de *Principia Mathematica*— es la *Teoría de los Tipos* de Bertrand RUSSELL. Su punto de partida es el célebre «Principio del Círculo vicioso»: «Lo que envuelve el *todo* de una colección no debe ser un miembro de la colección» [9]. No es posible desarrollar aquí la teoría de RUSSELL

lidad de una proposición que habla de sí misma en cuanto habla de todas las proposiciones".

El trabajo al que se refiere el autor en la nota 16, al pie de la página 79 del artículo citado (su tesis de doctorado) se ha publicado como libro: Emilio DÍAZ ESTÉVEZ, *El teorema de Gödel,* Ediciones Universidad de Navarra (EUNSA), Pamplona, 1975. Su lectura atenta arroja mucha luz sobre nuestros problemas de las antinomias lógicas.

9. El texto original de RUSSELL dice: "Whatever involves *all* of a collection must not be one of the collection", o, expresado a la inversa: "If, provided a certain collection had a total, it would have members only definable in terms of that total, then the said collection has no total". *Principia Mathematica,* Cambridge (University Press), 1962, pág. 37 (Chapter II: The Theory of Logical Types, I. The Vicious-Circle Principle).

El mismo maestro y colaborador en los *Principia Mathematica,* Alfred North WHITEHEAD, caracteriza la teoría de los tipos de Bertrand *in extenso*, y no es necesario para los conocedores de la Lógica formal. Reducido a su forma más sencilla, su contenido es el siguiente: Hay clases de individuos (tipo cero). Hay clases de clases (tipo uno). Hay clases de (clases de clases) (tipo dos) ... y así sigue, *in infinitum*. Entonces, el «Principio del Círculo vicioso» prohibe que los elementos de una clase sean del mismo tipo que caracteriza esta clase [10].

En primer lugar, hay que hacer constar que la lógica no impide pensar clases que se contienen a sí mismas: Si vamos al extremo, la clase total de todas las clases posibles es elemento de sí misma, sin contradicción alguna. En segundo lugar, no se puede ir al infinito en la definición de clases. A lo sumo, se puede distinguir entre clases de individuos y clases de clases (la «idea ideae» de SPINOZA está en el fondo), porque según un principio evidente de la teoría de los grupos —que es el fundamento de la teoría estructural de la matemática [11]— operaciones de operaciones son operaciones, y nada más.

Una precisión muy clara y convincente de la situación histórica, la ha dado Wolfgang STEGMÜLLER. Para evitar las antinomias sintácticas, hay que contestar a las tres preguntas: «¿Qué condiciones definen clases?», «¿Qué enunciados tienen sentido?», «¿Cómo debe ser formulado el enunciado según el cual la condición 'F(x)' define una clase?» STEGMÜLLER continúa: «La teoría de los tipos de RUSSELL es una contestación a la primera pregunta, las «*New Foundations*» de QUINE contestan a la segunda pre-

RUSSELL como "*nonsense*" ("sin sentido") en su artículo: *Mathematics and the Good*, en la obra de colección: *The Library of Living Philosophers*, Northwestern University Press, 1941, vol. III, apartado 5, fin.

Asimismo, el matemático y filósofo Hermann WEYL, en su hermoso y claro libro: *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (Princeton University Press, 1949) designa como "harakiri" (suicidio) de la razón el intento de RUSSELL (página 50, línea 3).

10. No puedo ni quiero entrar aquí en una discusión entre la "teoría ramificada" (RUSSELL) y la "teoría sencilla de los tipos (CHWISTEK, RAMSEY). Me refiero a los manuales citados en la nota 7.

11. Sobre todo en las obras del círculo Nicolás BOURBAKI, París (*Eléments de Mathématique*).

gunta y la teoría de los no-elementos de von NEUMANN a la tercera» [12]. Las tres teorías son modificaciones de las reglas del cálculo y no tocan a la raíz del mal que es una equivocación en el sentido del operador cuantificador. Más cerca de nuestras intenciones es la investigación del matemático de Gotinga Ernst ZERMELO sobre «números límites y ámbitos de conjunto» [13]. (Dicho entre paréntesis: Sigo a Wolfgang STEGMÜLLER —profesor ordinario de Filosofía en la universidad de Munich— también en la precisión del término «*antinomia*» como equivalente a «paradoja lógica») [14].

Ultimamente y para terminar, es necesario hacer constar que también el uso del *cuantificador existencial*, que se escribe con los símbolos E (HILBERT-ACKERMANN-BERNAYS, ROSSER), ∃ (WHITEHEAD-RUSSELL, KLEENE) o V (LORENZEN) y que se interpreta: «vale para algunos o, *por lo menos*, para uno», requiere una revisión. Con ocasión de las X Reuniones Filosóficas en la Universidad de Navarra, en la tarde de martes, día 10 de abril de 1973, el profesor ordinario de Lógica Jorge PÉREZ BALLESTAR llamó la atención sobre el hecho innegable de que el formalismo lógico convencional no es capaz de expresar una afirmación tan sencilla y clara como es la siguiente: «*Solamente* uno (o: *solamente* algunos) pertenece(n) a la clase c». El ejemplo

12. Wolfgang STEGMÜLLER, *Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik* (El problema de la verdad y la idea de la semántica), Ed. Springer, Wien (Viena), 1957, pág. 38.

13. E. ZERMELO, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche*, en: *Fundamenta Mathematicae*, XVI (1930), págs. 29-47.

W. van Orman QUINE, *New Foundations for Mathematical Logic*, en: "American Mathematical Monthly", 44 (1937), 70-80.

J. von NEUMANN, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre* (La axiomatización de la teoría de los conjuntos), en: "Mathematische Zeitschrift", 27 (1928), págs. 669-752.

W. STROBL, *La realidad científica y su crítica filosófica*, Ediciones Univesidad de Navarra, Pamplona, 1966, apartados 4.2.4 y 4.2.5, págs. 160-168.

14. W. STEGMÜLLER, *Das Wahrheitsproblem...*, pág. 26, arriba. Una buena introducción a la problemática da el libro de Alberto DOU DE XEXÁS, *Fundamentos de la Matemática*, Nueva Colección Labor, Barcelona, 1970, págs. 59-137.

que introdujo PÉREZ BALLESTAR fue una discusión en la que uno dice: «*Algunos* estudiantes son rebeldes». Otro contesta: «*No* tienes razón, porque *todos* los estudiantes son rebeldes». Esta oposición solamente tiene sentido si en la primera afirmación —la particular— se inserta la significación de «*solamente* algunos...». En el formalismo lógico convencional, no hay oposición alguna: Si es verdad que *todos* los estudiantes son rebeldes, es verdad que *también* los estudiantes de Madrid y de Munich, que *algunos* estudiantes son rebeldes... Si es verdad que *todos* los hombres son mortales, es verdad que *también* Sócrates es mortal, porque es hombre. En el formalismo convencional, no se ha pensado en la interpretación del cuantificador existencial: «*solamente* Sócrates...». Pero esta última interpretación, sin duda alguna, tiene también un obvio significado lógico: «El *único* Sócrates es capaz de contestar a esta pregunta».

Propondría, pues, distinguir también en el significado del *operador cuantificador existencial.* Entonces, podemos dejar el símbolo de la disyunción total o generalizada: «V» con el sentido usual y convencional: «*Por lo menos,* para uno o para algunos vale...». Pero es necesario introducir, para lograr la univocidad y no equivocación lógica, un operador existencial que dice: «*Sólo y únicamente* para uno o para algunos vale...», que puede ser simbolizado con el signo: «$\exists$». Si vale la pena distinguir también entre un operador existencial en sentido estricto («solamente para *uno*...») y un operador particular («solamente para *algunos*...»), esto lo enseñará el desarrollo del cálculo correspondiente.

No iré a ocuparme aquí de las *paradojas pragmáticas,* porque no pueden ser solucionadas con métodos puramente lógicos, sino que necesitan la apelación a un tribunal superior.

Podemos dar ahora un resumen y un diccionario de los operadores cuantificadores y su sentido correspondiente que proponemos para resolver las antinomias lógicas (sintácticas y semánticas):

Símbolos:	*Significado o interpretación:*
$\forall x$	«La clase de todos los x, *incluyendo* esta misma clase».
Λx	«La clase de todos los x, *excluyendo* esta misma clase».
(x)	«Para *cada uno* de los x, vale que...».
$\mathrm{V} x$	«*Por lo menos,* para algunos o para uno vale que...».
$\exists x$	«*Sólo y únicamente,* para algunos o para uno vale que...».

Aunque no es compatible con la definición exacta de un operador, hemos añadido también la variable x, para ganar más claridad en la exposición. El procedimiento es, como se ve, partiendo de lo más universal y generalizador y envolvente hasta lo más particular, individual y existencial.

Termina aquí el trabajo que me he propuesto para aclarar la posición de las antinomias en el plano y campo de la Lógica. Espero, sobre todo, la crítica positiva y fecunda de los expertos en las investigaciones de fundamentos de la Lógica y la Matemática.

Me queda la obligación y el deber tan grato y agradable de reconocer y agradecer la ayuda de las personas que me han dado y dirigido las ideas principales. En el tiempo de mis estudios en la Universidad de Munich, eran mis maestros en Filosofía y Lógica, Aloys WENZL y Wilhelm BRITZELMAYR. En la Universidad de Navarra, los diálogos con Emilio DÍAZ ESTÉVEZ y, últimamente, con Wolfgang RÖD, profesor extraordinario de Filosofía en la Universidad de Munich y ponente invitado a Navarra. La coincidencia en el juicio me animó a publicar este artículo. La aclaración del contenido es fruto de las discusiones y los diálogos con mis alumnos de Lógica y Metodología de las Ciencias en la Universidad de Navarra.