

CALCULO NUMERICO DEL PENSAMIENTO

En una publicación anterior hemos manifestado la sospecha y la esperanza de que todos los problemas lógicos del pensamiento se puedan resolver con *métodos matemáticos*¹, y hemos presentado, como un testimonio de tal posibilidad, el hallazgo de una solución *matemática* a los problemas del silogismo².

Vamos ahora a resolver otros problemas del razonar humano, pero no ya con la intención de añadir nuevos testimonios en favor de una sospecha, sino que pretendemos afrontar este tema en su total dimensión: queremos construir y desarrollar un *método matemático* que permita abordar cualquier problema lógico.

A nuestro modo de ver la Lógica es una disciplina que, a pesar del puesto singularmente destacado que ocupa hoy día entre los investigadores, no ha prestado todavía al hombre corriente los servicios portentosos que le ofrecen otras ramas del saber. Esto se debe seguramente a la especial dificultad de su cometido, pues si el intento de pensar sin cometer errores ya es poco asequible a la mente humana, el trabajo de pensar cómo se debe pensar para evitar los errores tiene que entrañar naturalmente una notable dificultad. Si se dispusiera, en cambio, de un método adecuado y sencillo, se podrían resolver con facilidad los problemas lógicos más complejos.

1. J. ROSSELLÓ, *Cálculo matemático del silogismo clásico*, volumen 8 de la colección "Algarrobo". Universidad de Piura (Perú), p. 11.

2. Op. cit., pp. 39 y ss.

Buscando esta meta, ambiciosa y lejana, vamos a introducir en la primera parte de este trabajo, como una simple posibilidad teórica, un método matemático general para toda la Lógica. En la segunda parte demostraremos su validez para los problemas lógicos que plantea la primera operación de la mente: la formación de conceptos. Algunos de estos problemas han sido ya resueltos por DE MORGAN mediante las leyes que llevan su nombre; otros, por BOOLE utilizando algunas leyes de la Lógica de clases; algunos otros, por JHON VENN con la ayuda de diagramas; y muchos otros están sin resolver. En la tercera parte demostraremos que este mismo método es válido también para resolver los problemas lógicos de la formación de proposiciones compuestas. Algunos de estos problemas han sido ya resueltos por las leyes de DE MORGAN; otros, por algunas leyes de la Lógica de proposiciones; algunos otros, por las llamadas "tablas de verdad"; otros, por el método de EMIL POST; algunos más, mediante "deducciones proposicionales"; otros más, por las "fórmulas normales" de HILBERT y ACKERMANN; y otros muchos están por resolver.

Dejamos para la próxima publicación un problema más arduo: la aplicación del método mencionado a la segunda operación de la mente; es decir, a la formación de proposiciones. Su dificultad estriba en que no nos conformaremos con *escribir* simbólicamente una proposición, como hace la Lógica de clases al traducir el verbo por la relación de subconjunto, ni tampoco nos contentaremos con aplicar ciertos cálculos a dicha relación de subconjunto, como hicimos en el ya mencionado "Cálculo matemático del silogismo clásico", sino que intentaremos convertir el verbo mismo en un cálculo. Por tanto tendremos que encontrar una *operación matemática* (no ya una relación) que haga con los conjuntos lo que el verbo hace con los conceptos.

Finalmente, queremos salir al paso de una posible mala interpretación. Sería un error pensar que pretendemos convertir el pensamiento del hombre —sus creencias, sus

conocimientos, sus opiniones— en un simple cálculo, encerrando su riqueza de contenido y su libertad indeclinable en los moldes fríos y rígidos de las fórmulas matemáticas, puesto que no nos proponemos aplicar la matemática al pensamiento, sino a la *lógica* que debe tener todo pensamiento. Prescindir de la lógica al pensar no indicaría libertad de espíritu, ni amplitud de la mente, sino, por el contrario, una considerable limitación y una profunda necesidad.

I. EL MÉTODO DE LOS CONJUNTOS DE NÚMEROS.

1. *La importancia de un método general.*

La palabra “método” (etimológicamente “camino”) significa “manera ordenada y racional de proceder”. Por tanto, sin método no hay ciencia; de la misma manera que sin caminos no hay civilización. Y así como las autopistas son un indicio del desarrollo material de un país, así también, la existencia de métodos generales que sirven para resolver múltiples y diferentes problemas son una señal inequívoca del desarrollo de una ciencia. En cambio, los métodos particulares y restringidos que sólo alcanzan a resolver algún problema elemental son como los estrechos caminos vecinales, que manifiestan la pobreza y subdesarrollo del lugar.

La Lógica matemática se encuentra en esta situación: utiliza muchos métodos y resuelve pocos problemas. Basta ver cuántos métodos hemos ya citado en estas primeras páginas, a pesar de que queremos hablar solamente de los problemas más sencillos de la Lógica: diagramas de VENN, leyes de DE MORGAN, leyes de BOOLE, leyes de la Lógica de proposiciones, tablas de verdad, método de POST, deducción proposicional, y “fórmulas normales” de HILBERT y ACKERMANN. Nos parece patente que la Lógica necesita un método general, y pensamos que es dentro del ámbito de la Matemática donde lo podremos encontrar.

2. *La Lógica y la Teoría de conjuntos. Lógica de BOOLE.*

Una vez que hemos tomado la decisión de trabajar dentro de la Matemática tenemos que escoger la rama que ofrezca más posibilidades. Como diremos más adelante, le vemos poco futuro —para el estudio de la Lógica— a la Aritmética e incluso a la Geometría (a los diagramas de VENN, por ejemplo), en cambio, la teoría de conjuntos presenta óptimas condiciones. Es una teoría relativamente moderna y, sin embargo, ha invadido toda la Matemática; es una teoría de reciente divulgación y ya ha conquistado un lugar destacado en todos los niveles de la enseñanza. Nos parece que se amolda a temas tan diversos, porque es un modelo o esquema que refleja adecuadamente la estructura racional de la mente; en otras palabras, pensamos que es la teoría que mejor engrana con la estructura lógica del pensamiento. Por de pronto, trabaja con unas nociones —los conjuntos— que desde un punto de vista racional se parecen a los conceptos o ideas de la mente; realiza unas operaciones —unión de conjuntos, etc.— que son una imagen fiel de ciertas operaciones mentales; etcétera. En definitiva, si fuera verdad que la inteligencia sigue unos caminos que la teoría de conjuntos ha estudiado o puede estudiar, resultaría que cualquier razonamiento, por el sólo hecho de ser un producto de la razón, podría ser estudiado mediante conjuntos.

GEORGE BOOLE tiene el mérito de haber desarrollado una Lógica, llamada “Lógica de clases” y también “Álgebra booleana”, que utiliza los conjuntos³. Para ello basta considerar que cada concepto es un conjunto, representado por una letra mayúscula, y que el verbo ser establece una relación entre conjuntos, representada por la relación de subconjuntos. Con esta representación se pueden

3. G. BOOLE, *The Mathematical Analysis of Logic*. London/Cambridge, 1847.

escribir de un modo simbólico muchas leyes de la Lógica, lo que facilita su estudio, e incluso abre horizontes al cálculo matemático; por ejemplo, gracias a la Lógica de BOOLE pudimos encontrar una solución matemática al silogismo. Pero esta solución, y en general toda la Lógica de clases, adolece de un serio defecto: una letra mayúscula usada como símbolo de un concepto expresa con claridad que ese concepto es diferente de los que están representados por otras letras, pero no indica en qué se parece, es decir, qué relaciones lógicas tiene con ellos.

Tal vez por ese motivo la Lógica de clases no ha progresado mucho, sino que, limitada a un campo bien restringido, es una más entre las diversas Lógicas que subsisten con ella: Lógica cuantificacional, Lógica de proposiciones, Lógica de relaciones, etc. Otro motivo puede ser la resistencia, muy justificada, del filósofo a considerar que las ideas del hombre puedan sustituirse por conjuntos, entendidos como "colecciones de objetos", pues eso supondría prescindir de todas las nociones abstractas, como, por ejemplo, la belleza, la justicia, la ciencia, etc. Y como por un instinto de defensa el lógico-matemático busca nuevos símbolos —¡ese afán tan notorio por la simbología!—, nuevas maneras de representar, sin empequeñecer, tanta profundidad del pensamiento y tanta riqueza del lenguaje.

Intentemos deshacer ese equívoco para poder adentrarnos confiadamente en el estudio de la Lógica mediante conjuntos. Apresurémonos a decir, para tranquilidad del lector, que, no intentamos que un conjunto recoja todos los matices de una palabra y menos toda la profundidad metafísica de ciertos conceptos; pretendemos solamente que sirva para distinguir un concepto de otros y que indique las relaciones lógicas que tiene con ellos, de la misma manera que cuando se coloca un número en la espalda de un deportista no se desea afirmar que un hombre sea un simple número, sino distinguirlo más fácilmente de los demás deportistas. Además, la Matemática también tiene una cierta capacidad de abstracción, según concede el filósofo mismo, y la noción precisa de "conjunto" no es una colec-

ción material de objetos, sino que es una idea abstracta que proviene de prescindir de todas las cualidades y características de que gozan dichos objetos —peso, color, forma, etc.— y quedarnos solamente con la propiedad que caracteriza a aquellos seres como pertenecientes al conjunto. Por ejemplo, la palabra “justicia” puede representarse por un conjunto, si admitimos que al hablar de un conjunto nos referimos a la *propiedad* que caracteriza a los elementos del conjunto, que serán en este caso todos los seres o situaciones que cumplen la propiedad de ser justos. Es más, el mismo proceso mental de abstracción es el que lleva tanto a formar palabras abstractas, como a obtener la ley o propiedad que caracteriza a los elementos de un conjunto.

3. *La Lógica y la Teoría de números. Sintaxis aritmética de GÖDEL.*

Decididos ya a estudiar la Lógica utilizando conjuntos, vamos a escoger la representación simbólica que resulte más conveniente. En vez de letras mayúsculas, como hace BOOLE, usaremos los *números naturales*, pues ofrecen muchas ventajas: son símbolos muy conocidos, se ordenan fácilmente, sus propiedades son muy sencillas y nunca se terminan, ya que forman un conjunto infinito. No debe causar extrañeza el uso de números para escribir palabras, pues aunque lo corriente es usar letras, sin embargo las letras del abecedario que emplea el castellano y otros idiomas son símbolos puramente arbitrarios y se pueden utilizar otros como ocurre con el griego o con el chino; además, existen escrituras en clave que emplean números en vez de letras.

Lo que tal vez puede sorprender es que pretendamos no sólo escribir con números, sino *razonar* con la ayuda de estos símbolos. Sin embargo en 1933 GÖDEL ya intentó servirse de los números naturales para el estudio de la Lógica y propuso el método que se suele llamar “sintaxis aritmética gödeliana”, que, a grandes rasgos, consiste en

asignar a cada razonamiento un número obtenido de la siguiente manera: se empieza por asociar a cada palabra (o grupo de palabras) un número natural y estos números se colocan como exponentes de otros tantos números sacados del conjunto ordenado 2, 3, 5, 7, 11, etc. (números primos). Y finalmente se forma el producto de estas potencias. Así se obtiene un sólo número como escritura de toda una frase por larga que sea.

Sin embargo nos apartamos radicalmente de este método, porque —entre otros motivos— GÖDEL, al asociar *siempre* a cada palabra un número, pasa por alto una distinción fundamental que existe entre las palabras de un lenguaje: unas, como enseña la Lógica, expresan realidades, se refieren al mundo real, de “facto” (algunos autores las llaman “fácticas”⁴), mientras que otras expresan operaciones mentales, se refieren al mundo de la mente, al orden lógico (palabras “lógicas” las llaman aquellos autores). Por ejemplo, la frase “inteligente y estudioso” tiene dos palabras fácticas y una lógica, pues tanto “inteligente” como “estudioso” se pueden decir de alguna persona; en cambio, de ningún ser se puede decir que sea una “y”, ya que esta conjunción expresa una *operación mental* que consiste en agrupar dos conceptos, pero no una *cualidad* de los seres reales.

La estructura lógica de una frase depende de estas partículas, de forma que si en la frase anterior conservamos la “y” y cambiamos las otras dos palabras, resulta otra frase que tiene la misma estructura lógica; por ejemplo, “deportista y simpático”. En cambio, si cambiamos la “y” por otra conjunción, por ejemplo la “o”, cambia también la estructura lógica, pues en el primer caso se consideraban las dos cualidades a la vez; mientras que en el segundo, una cualquiera de las dos.

La estructura lógica de estos ejemplos recuerdan las operaciones de conjuntos llamadas *intersección* y *unión*.

4. J. FERRATER MORA y H. LEBLANC, *Lógica Matemática*, México, 1967, p. 10.

Por tanto, se abre la posibilidad de traducir las palabras *fácticas* (sustantivos, adjetivos, etc.) por conjuntos de números, y las palabras *lógicas*, que expresan operaciones mentales (conjunciones, el verbo ser, etc.) por símbolos que indiquen operaciones entre conjuntos. Es decir se abre la posibilidad de desarrollar un método, que llamaremos "método de los conjuntos de números", que nos permita crear un lenguaje nuevo, especialmente apto para el razonamiento, al que llamaremos "lenguaje numérico".

4. *El método de los conjuntos de números.*

Para dar una visión general del *método de los conjuntos de números* empezaremos por exponer el objetivo final de todo nuestro trabajo. Como es bien sabido, todo razonamiento es un camino que parte de unas verdades conocidas, que se llaman "premisas", para llegar al conocimiento de una verdad nueva que se llama "conclusión". Normalmente se llega a la conclusión deseada pasando por muchas verdades que son conclusiones intermedias, como una carretera que va cruzando numerosas ciudades que son metas parciales del viaje o por lo menos pasos inevitables del recorrido.

Pues bien, el *método de los conjuntos de números* pretende pasar directamente de las premisas a la conclusión, evitando todos los razonamientos intermedios, como un puente aéreo entre dos ciudades lejanas que evita tener que seguir todo el curso sinuoso de una larga carretera. Para ello tendremos que escribir las premisas en *lenguaje numérico*, es decir traduciremos los conceptos por conjuntos de números y las palabras que expresan operaciones mentales por símbolos de operaciones. El resultado de estas operaciones será un conjunto, que traducido a palabras dará la conclusión de aquel razonamiento, siempre que el método que proponemos sea válido; cosa que, desde luego, está por ver.

Y como no daremos ninguna demostración *a priori*, el lector está en su derecho de pensar, mientras tanto, que

no vamos a conseguir lo que pretendemos: resolver con números los problemas del pensamiento. Pero no sería lógico que negara la posibilidad de este intento, pues hay un precedente histórico que es demasiado importante para ignorarlo en este momento. DESCARTES encontró un método que traslada cada problema geométrico a un problema analítico (de números), a pesar de que no se ve a primera vista una relación entre las figuras geométricas y los números. Como es bien sabido, consideró que las figuras están compuestas por puntos y asignó a cada punto un par de números mediante el ingenioso y sencillo procedimiento de los ejes llamados cartesianos.

Cabe, por tanto, intentar algo parecido: considerar el pensamiento como una estructura de partículas elementales que son los conceptos y asignar a cada concepto un conjunto de números elegidos de tal manera que las operaciones que se hagan con ellos sean un fiel reflejo de las operaciones que realiza la mente. De ser eso posible obtendremos una manera numérica de razonar, así como existe una manera numérica de resolver problemas geométricos. Con lo cual muchos pensamientos complejos quedarán reducidos a simples operaciones matemáticas que cualquier inteligencia media podrá resolver con rapidez y seguridad.

II. ESTUDIO DE LOS CONCEPTOS MEDIANTE CONJUNTOS DE NÚMEROS

1. *La formación de conceptos.*

Vamos a comenzar la exposición y demostración del método de los conjuntos de números, estudiando la manera de aplicarlo a la parte más elemental del razonamiento, a lo que la Filosofía llama *primera operación* de la mente; es decir, a la formación de conceptos.

Para que un concepto pueda intervenir en un razonamiento es indispensable que tenga una significación úni-

ca y precisa. Si se tratara, en cambio, de un lenguaje que no pretende expresar un razonamiento, y con más motivo si sólo busca la belleza literaria, las palabras pueden admitir diferentes sentidos: propio, figurado, familiar, simbólico, alegórico, etc. Sin embargo, al lenguaje de un razonamiento la Lógica le exige que cada concepto tenga un único y bien delimitado sentido a lo largo de todo un mismo proceso mental. De ahí la necesidad de definir, o de precisar de algún modo, todos los conceptos que podrían entenderse en otro sentido, y con más razón todas las palabras a las que el autor les da un sentido original.

Esta medida elemental de lógica es olvidada por los autores que gustan de palabras novedosas con sentidos nunca precisados. Si fueran poetas, estarían en su derecho, pero lo grave es que pretenden pasar por pensadores: por sociólogos, por pedagogos, por filósofos e incluso por teólogos.

En el *método de los conjuntos de números* vamos a proceder con el máximo rigor. Para asegurar que un concepto se usa en un solo sentido lo traduciremos por un único conjunto de números, siempre el *mismo* a lo largo de todo un mismo razonamiento, y *diferente* de los conjuntos que corresponden a otros conceptos; es decir, cada concepto tendrá su conjunto de números propio y exclusivo. Y para garantizar que cada concepto tenga una significación bien definida, distinguiremos siempre los conceptos *primitivos* de los conceptos *definidos*.

2. Conceptos primitivos y definidos.

Los conceptos que no son conocidos se deben definir o precisar de algún modo. Esto supone servirse de otros conceptos ya conocidos que a su vez pueden haber sido definidos a partir de otros. Naturalmente en este proceso de apoyar unos conceptos sobre otros no se puede continuar indefinidamente, sino que, como advierte la Lógica, hay que partir de unos conceptos que no se apoyan en otros a

los que se les llama *primitivos*. Y a todos los demás que se forman o definen a partir de los primitivos se les llama definidos.

Para facilitar la comprensión del *método de los conjuntos de números*, vamos a considerar en estas páginas que disponemos solamente de dos conceptos primitivos para un mismo razonamiento y en otra publicación próxima le daremos al método toda su generalidad, ampliándolo a cualquier número de conceptos por grande que sea.

Pues bien, si disponemos de dos conceptos cualesquiera, que vamos a considerarlos como primitivos, por ejemplo "simpático" y "responsable", podemos por de pronto obtener dos conceptos definidos, anteponiendo simplemente a estas palabras la partícula negativa "no"; es decir, los conceptos contradictorios "no simpático" y "no responsable". Literariamente puede ser más correcto utilizar las palabras antónimas, si expresan una oposición total, por ejemplo "antipático" e "irresponsable", pero desde un punto de vista lógico interesa destacar la partícula negativa "no", que la representaremos siempre y sólo por el símbolo negativo "—", que se lee "menos", como en la Aritmética. Ahora bien, si se antepone un "no" a un concepto contradictorio de otro, como dos negaciones afirman, se obtiene este primer concepto; por ejemplo, "no antipático" es lo mismo que "simpático". De ahí que, usando solamente la partícula negativa "no", no podremos obtener más conceptos que los cuatro ya mencionados: los dos primitivos y sus contradictorios.

3. *Conceptos simples y compuestos.*

A partir de estos cuatro conceptos, combinándolos adecuadamente, se obtienen todos los demás conceptos definidos, a los que se les llama *compuestos*, para distinguirlos de los primeros que se les considera *simples*. La lengua castellana expresa los conceptos compuestos de diferentes maneras:

a) mediante conjunciones; por ejemplo,

simpático y responsable
simpático pero no responsable
ni simpático ni responsable
antipático o irresponsable

b) mediante un pronombre relativo; por ejemplo,

simpático que es responsable
simpático que es irresponsable

c) mediante un sustantivo adjetivado; por ejemplo,

simpático responsable
antipático irresponsable.

Esta variedad gramatical proviene de la riqueza expresiva del lenguaje, no de una gran diversidad de operaciones mentales, pues hay sólo *tres* maneras diferentes de agrupar dos conceptos simples para formar uno compuesto: considerar los dos conceptos a la vez (simpático y responsable), considerar uno de los dos por lo menos (simpático o responsable), y finalmente considerar a uno cualquiera de los dos, pero no al otro (o simpático o responsable). A estas tres operaciones mentales corresponden tres operaciones matemáticas de conjuntos: la *intersección*, la *unión* y una combinación de estas dos que llamaremos *unión exclusiva*.

La Matemática llama *intersección* a la operación de formar un conjunto a partir de otros dos, tomando los elementos que pertenecen *a uno y a otro* (es decir, los elementos comunes), y llama *unión* a la operación de formar un conjunto, a partir de otros dos, tomando los elementos que pertenecen *a uno o al otro o a ambos* (es decir, los elementos de los dos conjuntos sin repetir los comunes). Y nosotros llamaremos *unión exclusiva* a la operación de formar un conjunto, a partir de otros dos, tomando los elementos que pertenecen *a uno o al otro, pero no a ambos* (es decir, los elementos de los dos conjuntos, exclu-

yendo los comunes). En otras palabras, la intersección toma los elementos comunes; la unión, los comunes y los no comunes; y la unión exclusiva, los no comunes. Como se ve, la unión exclusiva es una combinación de la unión y de la intersección: se forma la unión y se quitan los elementos de la intersección.

Algunos autores utilizan el *punto* para representar la intersección. Animados por este ejemplo de sencillez en los símbolos, usaremos la *coma* para representar la unión, y el *punto y coma*, para la unión exclusiva. Por tanto traduciremos, como ya se verá, la conjunción "y" por un punto; la "o", por una coma; y la "o...o" (es decir, las conjunciones disyuntivas exclusivas como la "o...o", "o bien", etcétera), por un punto y coma.

4. Escritura numérica de los conceptos primitivos.

Ya estamos en condiciones de poder abordar el problema de traducir al lenguaje numérico las palabras que expresan conceptos. Tomemos dos conceptos cualesquiera, por ejemplo "alumno" y "sano", que los vamos a considerar como primitivos en un determinado razonamiento. De estos se derivan los contradictorios "no alumno" y "no sano" es decir "enfermo". Combinemos ahora mediante la conjunción "y" estos conceptos dos a dos:

alumno y sano
no alumno y sano
alumno y enfermo
no alumno y enfermo.

De esta manera hemos obtenido cuatro conceptos compuestos que son independientes entre sí, es decir, dos cualesquiera de ellos no se pueden referir a un mismo individuo, ya que uno de los dos conceptos simples que componen cada uno de ellos es contradictorio de uno de los componentes de los otros tres. Es otras palabras, un grupo cualquiera de personas se puede dividir en cuatro con-

juntos separados (es decir, sin elementos comunes), pues basta dividir los alumnos de los no alumnos y cada uno de estos conjuntos, en sanos y enfermos. Admitimos naturalmente la posibilidad de que alguno de estos conjuntos se quede sin nadie, es decir que sea un conjunto sin elementos, al que la Matemática llama *conjunto vacío* y que representaremos por el número *cero*. Por tanto traduciremos por "cero" el concepto "nada" o "nadie". Y los cuatro conceptos compuestos los traduciremos por conjuntos de números naturales que expresen la propiedad mencionada de no tener elementos comunes; es decir, por conjuntos que no tengan números iguales. Lo más cómodo es usar conjuntos de un sólo número. Por tanto traduciremos:

- por (1) el concepto "alumno y sano"
- por (2) el concepto "no alumno y sano"
- por (3) el concepto "alumno y enfermo"
- por (4) el concepto "no alumno y enfermo".

El orden que hemos seguido es arbitrario, pues podríamos relacionar estos números y conceptos de otra forma cualquiera. Con estos cuatro números ya estamos en condiciones de afrontar todos los problemas lógicos que se pueden plantear cuando intervienen sólo dos conceptos primitivos. Para decir matemáticamente que no usaremos otros números, se llama al conjunto de estos cuatro números *conjunto universal* (se suele representar por U). Por tanto en esta publicación se supondrá siempre que

$$U = (1,2,3,4).$$

Por otra parte se observa que, como los conceptos (1) y (3) se han obtenido dividiendo a los alumnos en sanos y enfermos, si agrupamos de nuevo a estos dos conceptos obtenemos naturalmente el concepto "alumno". Por tanto, la traducción *numérica* de "alumno" será:

$$\begin{aligned} \text{alumno} &= \text{alumno sano o alumno enfermo} = \\ &(1) , (3) = (1,3) \end{aligned}$$

Análogamente la traducción *numérica* de “sano” será:

$$\begin{aligned}\text{sano} &= \text{alumno sano o no alumno sano} = (1), (2) \\ &= (1,2)\end{aligned}$$

Estos dos últimos resultados son los únicos que interesa memorizar, pues siempre traduciremos directamente los dos conceptos primitivos, cualesquiera que sean, por (1,3) y (1,2); y a partir de estos dos conjuntos de números obtendremos matemáticamente la *escritura numérica* de todos los conjuntos derivados.

Obsérvese que en los conjuntos (1,3) y (1,2) usamos la “coma” para separar los elementos de un conjunto, siguiendo la costumbre de la Matemática. Sin embargo, no se crea que damos una doble significación a este símbolo, sino todo lo contrario: precisamente hemos escogido la coma como símbolo de la unión para que mantenga este sentido también ahora, porque nos interesa destacar que cada conjunto de varios números es una *unión* de conjuntos unitarios.

5. *Escritura numérica de los conceptos definidos.*

A partir de dos conceptos cualesquiera, considerados como primitivos, por ejemplo “médico” y “farmacéutico”, podemos formar los contradictorios anteponiendo la partícula negativa “no”; por tanto, su escritura numérica se obtendrá anteponiendo el símbolo negativo “menos” a los conjuntos (1,3) y (1,2). Por ejemplo:

“no médico” se escribe así: $-(1,3)$

“no farmacéutico” se escribe: $-(1,2)$

Ahora bien, el contradictorio de un concepto contiene todos los individuos que no pertenecen a este concepto, luego su escritura numérica será un conjunto que la Matemática llama *complementario* y que contiene todos los

números (de los cuatro que usamos) que no están en la escritura numérica del concepto primitivo; es decir:

$$\text{"no médico"} = -(1,3) = (2,4)$$

$$\text{"no farmacéutico"} = -(1,2) = (3,4)$$

Combinando entre sí, dos a dos, estos cuatro conceptos simples, mediante conjunciones, se forman conceptos definidos compuestos. Por tanto, su escritura numérica se obtiene traduciendo los dos conceptos primitivos por (1,3) y por (1,2); la partícula negativa "no", por el símbolo "menos"; y las conjunciones por un punto, una coma o un punto y coma según que se trate de la "y", de la "o", o de la "o...o". Y, finalmente, se calculan las operaciones y se ordenan los números de menor a mayor, por comodidad. Por ejemplo:

$$\text{"médico y farmacéutico"} = (1,3) \cdot (1,2) = (1)$$

$$\begin{aligned} \text{"no médico y farmacéutico"} &= -(1,3) \cdot (1,2) = \\ &(2,4) \cdot (1,2) = (2) \end{aligned}$$

(El punto indica que se toman los números *comunes*)

$$\text{"médico o farmacéutico"} = (1,3) , (1,2) = (1,2,3)$$

$$\begin{aligned} \text{"médico o no farmacéutico"} &= (1,3) , -(1,2) = \\ &(1,3) , (3,4) = (1,3,4) \end{aligned}$$

(La coma indica que se toman *comunes y no comunes*)

$$\text{"o médico o farmacéutico"} = (1,3) ; (1,2) = (2,3)$$

$$\begin{aligned} \text{"o no médico o farmacéutico"} &= -(1,3) ; (1,2) \\ &= (2,4) ; (1,2) = (1,4) \end{aligned}$$

(El punto y coma indica que se toman los *no comunes*).

Como ya se ha dicho, consideramos los conceptos como *propiedades*, más que como colecciones de individuos; por tanto, deben expresarse en singular. Así pues, si los conceptos primitivos están escritos en plural, hay que transformar la frase pasándolos al singular y cambiando la conjunción (o la expresión equivalente), si hace falta, para

que siga expresando el mismo concepto de antes. Si ese cambio presentara dificultades, una manera segura de hacerlo es pasar el concepto compuesto a la expresión siguiente: "el conjunto en el que cada individuo es...". Por ejemplo:

Los médicos o los farmacéuticos = el conjunto en el que cada individuo es *médico o farmacéutico*
 $= (1,3) , (1,2) = (1,2,3)$

Los médicos y los farmacéuticos = el conjunto en el que cada individuo es *médico o farmacéutico*.

Los médicos que son farmacéuticos = el conjunto en el que cada individuo es *médico y farmacéutico* $= (1,3) \cdot (1,2) = (1)$

Los médicos y los farmacéuticos que no son médicos = el conjunto en el que cada individuo es *o médico o farmacéutico* $= (1,3) ; (1,2) = (2,3)$

Una vez que ya sabemos escribir numéricamente cualquier concepto, primitivo o definido, estamos en condiciones de abordar todos los problemas lógicos que puedan plantear tales conceptos. A continuación vamos a aplicar el método de los conjuntos numéricos a los problemas que ya han sido resueltos por la Lógica matemática, aunque sirviéndose de diversos procedimientos, y sin lograr, a veces, una solución general; y también lo aplicaremos a algunos otros no resueltos todavía, que nos parecen de especial interés.

6. Conceptos compuestos contradictorios. Leyes de DE MORGAN. Diagramas de VENN.

La operación mental de negar un concepto se complica cuando se trata de un concepto compuesto. Las *leyes de DE MORGAN*⁵ resuelven en parte este problema; aunque tienen distintas formulaciones, en definitiva lo que vienen a decir es que para hallar el contradictorio de un concepto

5. A. DE MORGAN, *Formal Logic*. London, 1847.

compuesto, por ejemplo "varón y soltero", se cambian los dos conceptos simples ("varón" y "soltero") por sus contradictorios ("no varón", es decir "mujer", y "no soltero", es decir "casado") y se cambia también la conjunción: si hay una "y", se pone una "o", y si hay una "o", se pone una "y". Así pues, el contradictorio de "varón y soltero" es "mujer o casado"; y el contradictorio de "varón o soltero" es "mujer y casado", es decir "mujer casada". Estas leyes no resuelven el problema de un modo general, pues no consideran la conjunción adversativa "o...o".

Con los *diagramas de VENN*⁶ se soluciona este problema, pero sólo en ciertos casos. Como es sabido JHON VENN representa los conceptos por círculos y el universal por un rectángulo que encierra estos círculos. Pues bien, dos conceptos son contradictorios cuando sus representaciones gráficas llenan todo el rectángulo, sin tener zonas comunes. Este método tampoco es general, pues los diagramas sólo se pueden utilizar, como es lógico, en los casos en que es posible dibujarlos. Por ejemplo, si uno es parte del otro, se dibuja un círculo dentro del otro; si no tienen ningún individuo común, se dibujan dos círculos separados, etcétera. Pero pocas veces se tienen los datos suficientes para hacer el dibujo, y ni siquiera se ha hecho un estudio completo de cuándo se pueden usar diagramas y cuándo no. Un tal estudio lo presentaremos en nuestra próxima publicación ya mencionada.

Por el *método de los conjuntos de números* se obtiene una solución completa: *dos conceptos, simples o compuestos, son contradictorios, si y sólo si sus escrituras numéricas lo son*. Por tanto, para hallar el concepto contradictorio de uno dado, se escribe numéricamente este concepto y se halla el conjunto contradictorio o complementario. Como ejemplo, comprobemos las leyes de DE MORGAN:

$$\begin{aligned}\text{varón y soltero} &= (1,3) \cdot (1,2) = (1) \\ \text{mujer o casado} &= \neg(1,3) \vee \neg(1,2) = (2,4), (3,4) = \\ &\quad (2,3,4)\end{aligned}$$

6. JHON VENN, *Symbolic Logic*. London, 1881.

Como se ve, estos dos conceptos que son contradictorios tienen escrituras numéricas, (1) y (2,3,4), que también son contradictorias o complementarias.

De la misma manera:

$$\begin{aligned}\text{varón o soltero} &= (1,3) , (1,2) = (1,2,3) \\ \text{mujer casada} &= -(1,3) . -(1,2) = (2,4) . (3,4) = (4)\end{aligned}$$

También en este caso las escrituras numéricas, (1,2,3) y (4), son contradictorias. Veamos finalmente un ejemplo que las leyes de DE MORGAN no resuelven: el concepto "o varón o soltero" está compuesto por los individuos que son varones pero no solteros (varones casados) y los que son solteros pero no varones (solteras); razonando mentalmente se puede ver que el contradictorio está formado por los varones solteros y las casadas, por tanto es "o varón o casado". Apliquemos el método:

$$\begin{aligned}\text{o varón o soltero} &= (1,3) ; (1,2) = (2,3) \\ \text{o varón o casado} &= (1,3) ; -(1,2) = (1,3) ; (3,4) = \\ &\quad (1,4)\end{aligned}$$

Son, en efecto, conceptos contradictorios, porque sus conjuntos numéricos lo son.

7. Conceptos iguales. Leyes de BOOLE. Diagramas de VENN.

Algunas *leyes de BOOLE* expresan la igualdad entre dos conceptos, es decir, afirman que son un mismo concepto, aunque sea distinta la forma gramatical de escribirlos; pero no consideran todas las igualdades posibles. También los *diagramas de VENN* resuelven este problema, aunque sólo en los casos en que se pueden dibujar, pues dos conceptos son iguales si están representados por una misma zona.

Numéricamente se obtiene una solución general: dos conceptos son iguales, si tienen la misma escritura numé-

rica. Como ejemplo comprobemos las leyes de BOOLE que se refieren a conceptos compuestos:

a) La *ley de identidad* dice que un concepto es igual a sí mismo. Por ejemplo:

$$\text{alegre} = \text{alegre} \qquad (1,3) = (1,3)$$

b) La *ley de contradicción* dice que un concepto y su contradictorio se excluyen, es decir, no tienen elementos comunes. Por ejemplo:

$$\text{vivo y muerto} = (1,3) \cdot \neg(1,3) = (1,3) \cdot (2,4) = 0 \\ (\text{conjunto vacío})$$

c) La *ley del tercio excluido* dice que un concepto unido a su contradictorio abarca a todos los individuos; en otras palabras, que todo individuo cumple una propiedad cualquiera o no la cumple. Por ejemplo:

Toda persona es peruana o extranjera

$$\text{peruano o extranjero} = (1,3) \vee \neg(1,3) = (1,3) \vee (2,4) \\ = (1,2,3,4) \text{ (conjunto universal)}$$

d) La *ley de la doble negación* dice que el contradictorio del contradictorio de un concepto es este mismo concepto. Por ejemplo: "no desconocido" es lo mismo que "conocido". En efecto:

$$\text{conocido} = (1,3) \\ \text{no desconocido} = \neg(\neg(1,3)) = \neg(2,4) = (1,3)$$

e) La *ley conmutativa* dice que tanto la conjunción "y" como la "o" tienen la propiedad conmutativa, es decir que el orden de los conceptos no altera el resultado. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{experto y trabajador} &= (1,3) \cdot (1,2) = (1) \\ \text{trabajador y experto} &= (1,2) \cdot (1,3) = (1) \\ \text{experto o trabajador} &= (1,3) \vee (1,2) = (1,2,3) \\ \text{trabajador o experto} &= (1,2) \vee (1,3) = (1,2,3) \end{aligned}$$

No consideramos las leyes asociativa y distributiva, porque intervienen tres conceptos, y en estas páginas sólo trabajamos con dos. No estará de más advertir que no hemos pretendido *demostrar* las leyes anteriores, sino mostrar, a modo de ejercicio, que el lenguaje numérico las cumple, lo que ya se sabía de antemano, pues como enseña la Matemática estas leyes son también propiedades de las operaciones entre conjuntos.

8. Conceptos diferentes.

El problema de averiguar si dos conceptos son diferentes entre sí no se puede resolver con las *leyes de BOOLE*, pues éstas se limitan a algunos casos de igualdades de conceptos, y no abarcan todas las posibilidades. Los *diagramas de VENN* resuelven este problema, si es que pueden dibujarse: dos conceptos son diferentes si están representados gráficamente por zonas diferentes.

Numéricamente el problema se resuelve en toda su generalidad: *dos conceptos son diferentes si tienen escritura numérica diferente*. Por tanto a cada concepto le corresponde una sola escritura numérica. Es ésta una propiedad muy notable del lenguaje numérico. Ningún lenguaje ha expresado, que sepamos, los pensamientos de esta forma unívoca que el matemático llama *función* o *aplicación*. En los demás lenguajes, corrientes o simbólicos, un mismo concepto se puede escribir de distintas maneras; precisamente las leyes de *BOOLE* mencionadas sirven para descubrir igualdades entre conceptos que están escritos de forma distinta. Estamos pues considerando el *primer lenguaje función*. Precisando más, al traducir un lenguaje cualquiera al lenguaje numérico se establece una relación unívoca, es decir una función: cada concepto expresado de la forma que sea tiene una única expresión numérica; la inversa, en cambio, no es cierta, ya que un conjunto numérico se puede leer (en castellano, por ejemplo) de distintas formas, aunque el contenido es el mismo. Sin em-

bargo, si se traduce directamente del pensamiento al lenguaje numérico la relación es además biunívoca, pues a conceptos iguales corresponden números iguales y a conceptos distintos números distintos. Esta última afirmación nos asegura que el *lenguaje numérico* es la más fiel expresión del pensamiento.

9. Número total de conceptos diferentes.

El problema lógico, más complejo que el anterior, de hallar todos los conceptos diferentes tampoco se puede resolver con leyes o diagramas; en cambio, el método de los conjuntos de números lo traslada al problema matemático elemental de calcular cuántos conjuntos diferentes se pueden formar con los números uno, dos, tres y cuatro. Si los tomamos de uno en uno, resultan cuatro: el (1), el (2), el (3) y el (4). Tomados de dos en dos, se obtienen seis: (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4) y (3,4). Tomados de tres en tres, se obtienen cuatro: (1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4). Tomando los cuatro, hay uno: el (1,2,3,4). Y, finalmente, si no se toma ninguno, resulta uno más: el conjunto vacío. En total hay, pues, dieciséis conceptos diferentes y no puede haber otros. Por tanto, cualesquiera que sean las combinaciones que se hagan con dos conceptos primitivos se obtendrá necesariamente uno de estos dieciséis.

Vamos, como ejemplo, a escribirlos todos y mantendremos el mismo orden en que los hemos contado. Sean los conceptos primitivos "valiente" y "fuerte" y sus contradictorios "cobarde" y "débil"; por consiguiente:

1. valiente y fuerte = (1,3) . (1,2) = (1)
2. cobarde y fuerte = $\neg(1,3)$. (1,2) = (2,4) . (1,2) = (2)
3. valiente y débil = (1,3) . $\neg(1,2)$ = (1,3) . (3,4) = (3)
4. cobarde y débil = $\neg(1,3)$. $\neg(1,2)$ = (2,4) . (3,4) = (4)
5. fuerte = (1,2)
6. valiente = (1,3)
7. o valiente o débil = (1,3) ; $\neg(1,2)$ = (1,3) ; (3,4) = (1,4)

8. o valiente o fuerte = $(1,3)$; $(1,2) = (2,3)$
9. cobarde = $\neg(1,3) = (2,4)$
10. débil = $\neg(1,2) = (3,4)$
11. valiente o fuerte = $(1,3)$, $(1,2) = (1,2,3)$
12. cobarde o fuerte = $\neg(1,3)$, $(1,2) = (2,4)$, $(1,2) = (1,2,4)$
13. valiente o débil = $(1,3)$, $\neg(1,2) = (1,3)$, $(3,4) = (1,3,4)$
14. cobarde o débil = $\neg(1,3)$, $\neg(1,2) = (2,4)$, $(3,4) = (2,3,4)$
15. valiente o cobarde = $(1,3)$, $\neg(1,3) = (1,3)$, $(2,4) = (1,2,3,4)$
16. valiente y cobarde = $(1,3) \cdot \neg(1,3) = (1,3) \cdot (2,4) = 0$

Obsérvese que si excluimos los conceptos 15 y 16 que se expresan más adecuadamente por las palabras "todos" y "ninguno" respectivamente, hay en los demás conceptos una relación entre las conjunciones y el número de elementos de cada conjunto, pues la "y" se escribe siempre con *un sólo* número, como se ve en los cuatro primeros conceptos (y al revés, un conjunto unitario se puede traducir al castellano mediante la "y"); la "o...o" se escribe siempre con *dos* números, como se ve en los conceptos 7 y 8 (y al revés, un conjunto de dos números, si no es un concepto simple como el 5 ó el 6 ó el 9 ó el 10, se puede traducir por la "o...o"); y finalmente la conjunción "o" se escribe siempre con *tres* números, como se ve en los conceptos 11, 12, 13 y 14 (y al revés, todo conjunto de tres números se puede traducir por una "o").

10. *Conceptos de extensión no mayor que otros. Leyes de simplificación.*

El problema lógico de comparar dos conceptos para averiguar si uno no tiene mayor extensión que el otro, es decir, si todos los individuos del primero pertenecen al segundo, se resuelve en algún caso con las dos leyes de BOOLE llamadas de *simplificación*, que se pueden formular de este modo: la intersección de dos conceptos no tiene

mayor extensión que uno cualquiera de los dos, y un concepto no tiene mayor extensión que la unión de éste con otro cualquiera. Por ejemplo, "artista famoso" no tiene mayor extensión que "artista" ni que "famoso" (cualquiera que sea el grupo de personas de que se esté hablando; es decir, cualquiera que sea el universal), y por otra parte, el concepto "artista" (o el concepto "famoso") no tiene mayor extensión que "artista o famoso". También los *diagramas de VENN* solucionan a veces este problema: un concepto no tiene mayor extensión que otro, si la zona que lo representa gráficamente no es mayor que la zona que representa al segundo.

Con la *escritura numérica* se obtiene una solución general a este problema: *un concepto no tiene mayor extensión que otro, si y sólo si la escritura numérica del primero está contenida en la escritura del segundo*. En efecto, si tuviera mayor extensión debería tener unos individuos que no tiene el segundo concepto y estos individuos estarían representados por algún número que no estaría en la escritura del segundo; y al revés, si la escritura del primero está contenida en la del segundo, todos los individuos del primer concepto están representados por unos números que están en la escritura del segundo, luego pertenecen también a éste.

Comprobemos, por ejemplo, las leyes de simplificación:

$$\text{artista} = (1,3)$$

$$\text{famoso} = (1,2)$$

$$\text{artista famoso} = (1,3) \cdot (1,2) = (1)$$

$$\text{artista o famoso} = (1,3) \cup (1,2) = (1,2,3)$$

Como se ve, (1) está contenido en (1,3) y en (1,2), y éstos dos lo están en (1,2,3).

Otros muchos ejemplos, considerados o no en las leyes anteriores, se pueden obtener fácilmente mirando los dieciséis conceptos del apartado anterior. Por ejemplo, el número cuatro (cobarde y débil), cuya escritura numérica es (4), tiene menos extensión que cualquiera de los concep-

tos cuya escritura tiene ese número cuatro: el 7 (o valiente o débil), el 9 (cobarde), el 10 (débil), el 12 (cobarde o fuerte), el 13 (valiente o débil), el 14 (cobarde o débil) y el 15 (el universal).

11. *Simplificación de conceptos.*

El problema lógico de simplificar un concepto para darle una forma gramatical más sencilla de la que tiene, se puede resolver en algunos casos por las *leyes de BOOLE* ya mencionadas. También los *diagramas de VENN* pueden sugerir, a veces, una manera más sencilla de escribir las zonas que representan gráficamente al concepto dado. Pero estos métodos ni son generales, ni dan la seguridad de haber encontrado la expresión más sencilla.

Con el *lenguaje numérico* se obtiene la mayor simplificación posible de cualquier concepto, por complejo que sea, pues como la estructura de un concepto se traduce por operaciones, una estructura compleja se manifiesta en que aparecen muchas operaciones. Y por tanto al efectuar todas las operaciones el concepto queda totalmente simplificado. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{o "valiente y fuerte" o "cobarde y débil"} &= ((1,3) . \\ &(1,2)) ; (-(1,3) . -(1,2)) = (1) ; ((2,4) . (3,4)) \\ &= (1) ; (4) = (1,4) = \text{"o valiente o débil"} \end{aligned}$$

(Véase el concepto número 7 del apartado 9)

$$\begin{aligned} \text{"cobarde o débil" y "valiente o fuerte"} &= (-(1,3) , \\ &-(1,2)) . ((1,3) , (1,2)) = ((2,4) , (3,4)) . (1,2,3) \\ &= (2,3,4) . (1,2,3) = (2,3) = \text{o valiente o fuerte} \end{aligned}$$

(Véase el concepto número 8 del apartado 9).

12. *Traducción a palabras de un conjunto de números.*

Hemos dado una solución general a problemas diversos, utilizando un solo método. Pero no se piense que la

importancia de este método consiste en haber encontrado una solución general y única a los problemas lógicos de la formación de conceptos. Lo que realmente importa es que hemos dado el primer paso para un lenguaje numérico, aprendiendo a escribir con números cualquier concepto, sea primitivo o definido. De tal manera que la aplicación del método de los conjuntos de números a los problemas y a las leyes que hemos estudiado ha servido simplemente de ejercicio para una mayor comprensión del método, ya que para obtener la conclusión de un razonamiento nunca necesitaremos resolver problemas parciales ni tener en cuenta leyes de la Lógica, pues la escritura numérica de un concepto ya ha resuelto automáticamente tales problemas y ya ha cumplido inevitablemente dichas leyes.

Es más, con el lenguaje numérico pretendemos, como ya se ha dicho, llegar directamente de las premisas a la conclusión, sin tener que resolver ningún paso intermedio. Por eso, una vez que se han escrito numéricamente los conceptos de una frase, el proceso no ha terminado, sino que también hará falta escribir con números las demás palabras. De ahí que no hemos hablado siquiera de la última etapa de todo cálculo matemático: la traducción en palabras de los resultados obtenidos en símbolos.

Sin embargo, para no dejar pendiente un tema que nos hará falta en otras publicaciones, lo vamos a resolver ahora. Si se tiene a mano la lista de los dieciséis conjuntos posibles, estudiados en el apartado 9, se trata simplemente de confrontar esa lista. En cambio, si se quiere hacer una traducción directa, se puede proceder de la siguiente manera:

Primero: se comprueba si el concepto es simple o compuesto. Son simples, como se sabe, los conceptos (1,3) y (1,2) y sus contradictorios, (2,4) y (3,4), y solamente ellos. En este caso la traducción a palabras es inmediata.

Segundo: si el concepto es compuesto, se escriben los dos conceptos primitivos en singular, separados por una "y", si el conjunto tiene un solo número; por una "o...o", si tiene dos; y por una "o", si tiene tres.

Tercero: finalmente, se antepone un “no” al concepto primitivo cuyo conjunto no contiene ni es contenido por el conjunto dado; y si este conjunto tiene dos números, se prescinde del segundo número, antes de aplicar este tercer paso: Por ejemplo, si los conceptos primitivos son “isósceles” y “rectángulo”, resulta que:

$$(3,4) = \text{no rectángulo}$$

$$(2) = \text{no isósceles y rectángulo}$$

(Se pone la “y”, porque hay un sólo número, el dos; y se pone el “no”, porque el (2) no está en (1,3), que es isósceles).

$$(2,3) = \text{o no isósceles o rectángulo}$$

(Se pone la “o...o”, porque tiene dos números y no es ni el (1,3), ni el (1,2), ni sus contradictorios; y se pone el “no”, porque prescindiendo del segundo número, el tres, queda el dos que no está en (1,3)).

$$(1,3,4) = \text{isósceles o no rectángulo}$$

(Se pone la “o”, porque tiene tres números; y se pone el “no”, porque (1,2) que es rectángulo no está en (1,3,4)).

III. ESTUDIO DE LAS PROPOSICIONES POR CONJUNTOS DE NÚMEROS

1. *La formación de proposiciones compuestas.*

Todo lo que hemos estudiado hasta ahora sobre la formación de conceptos, se puede aplicar a la formación de proposiciones compuestas. Pues de la misma manera que hemos considerado a los conceptos como “partículas elementales” de un razonamiento, ocurre también, a veces, que las proposiciones enteras (sujeto, verbo, etc.) formen unidades invariables a lo largo de todo un razonamiento,

lo que permite considerarlas como "partículas elementales", de acuerdo con lo que hace la Lógica llamada de proposiciones.

Por tanto, vamos a suponer que las proposiciones se mantienen fijas (de no ser así, se presentan problemas que los resolveremos en nuestra próxima publicación) y que lo único que cambia es la estructura lógica que las une entre sí, estructura que, como vamos a ver, es *la misma* que la que acabamos de estudiar para los conceptos. Por de pronto la gramática usa, a veces, las mismas conjunciones para los conceptos que para las proposiciones; por ejemplo, la "y" se emplea tanto para decir "sano y alegre" como para decir "llueve y hace sol". Sin embargo, hay conjunciones que las reserva para las proposiciones: cuando, pues, porque, si, puesto que, etc. A su vez, la Matemática ha establecido un paralelismo entre un conjunto y la ley que lo define, que es en definitiva una proposición. También la Lógica matemática acepta este paralelismo desde el momento que aplica las leyes de DE MORGAN también a las proposiciones y establece una comparación entre las leyes de la Lógica de proposiciones y las leyes de BOOLE, sin embargo utiliza simbologías diferentes.

Con el método de los conjuntos vamos a comprobar que se trata de un mismo problema lógico, lo que ya se ve de antemano si deslindamos campos: las estructuras lógicas, como ya se dijo, son operaciones mentales, mientras que los conceptos y las proposiciones son palabras "fácticas" (recuérdese lo dicho en I,3). Por tanto si aplicamos las *mismas operaciones* a los conceptos y a las proposiciones se obtendrá una *misma* estructura lógica.

2. *Proposiciones primitivas y derivadas.*

De la misma manera que la mente, combinando conceptos conocidos o primitivos, forma los conceptos derivados o definidos, así también, combinando proposiciones que se consideran primitivas, forma las proposiciones derivadas de aquéllas. Para facilitar nuestro estudio usaremos sólo

dos proposiciones primitivas y en otra publicación próxima le daremos al método toda su generalidad, ampliándolo a cualquier número de proposiciones por grande que sea.

Pues bien, a partir de dos proposiciones primitivas, por ejemplo "todos los alumnos han aprobado" y "el profesor está contento", se pueden obtener otras dos, sus *contradictorias*, negando lo que afirman las anteriores mediante las frases "es falso que...", "no es cierto que...", etc.; o también anteponiendo al verbo un "no", si la proposición no tiene el sujeto cuantificado, es decir si no va acompañado de "todos", "los", "algunos". Por ejemplo, "es falso que todos los alumnos han aprobado" y "es falso que el profesor está contento" (o también "el profesor no está contento"). La operación de negar una proposición es la misma que la de negar un concepto, y en consecuencia la representaremos por el mismo símbolo: el "menos".

3. *Proposiciones simples y compuestas.*

A partir de dos proposiciones primitivas y de sus contradictorias, combinándolas adecuadamente, se obtienen todas las demás proposiciones derivadas, que se llaman *compuestas* para distinguirlas de las cuatro primeras que se llaman *simples*. La lengua castellana expresa las proposiciones compuestas mediante una gran abundancia de conjunciones, pero esta variedad proviene de la riqueza expresiva del lenguaje, no de una gran diversidad de operaciones mentales, pues sólo hay *tres* maneras diferentes de agrupar dos proposiciones, que vienen expresadas mediante la "y", la "o" y la "o...o", igual que en los conceptos. Por tanto, aunque la Lógica matemática utilice símbolos diferentes para las conjunciones que se refieren a proposiciones (los conectivos) que para las que se refieren a conceptos (los símbolos de la intersección, etc.), sin embargo, nosotros usaremos los mismos, porque no hay necesidad de distinguir lo que no es distinto. En consecuencia, seguiremos traduciendo la "y" por el punto; la "o", por la coma; y la "o...o", por el punto y coma.

4. *Escritura numérica de las proposiciones primitivas.*

Tomemos dos proposiciones cualesquiera como primitivas, por ejemplo "estoy alegre" y "canto". Sus contradictorias son "no estoy alegre" y "no canto". Combinemos ahora mediante la "y" estas cuatro proposiciones dos a dos:

estoy alegre y canto
no estoy alegre y canto
estoy alegre y no canto
no estoy alegre y no canto

Estas cuatro proposiciones compuestas son excluyentes entre sí, es decir, sólo una de ellas puede ser verdad (ya que una de las dos proposiciones simples que componen cada una de ellas es contradictoria de una de las componentes de las otras). Se trata, pues, de cuatro posibilidades o casos, que los vamos a enumerar asignando el conjunto (1) al caso de afirmar las dos proposiciones a la vez; el (2), al caso de negar la primera y afirmar la segunda; el (3), al caso de afirmar la primera y negar la segunda; y finalmente el (4), al caso de negar las dos. Por tanto, esa será la escritura simbólica de dichas proposiciones:

estoy alegre y canto = (1)
no estoy alegre y canto = (2)
estoy alegre y no canto = (3)
no estoy alegre y no canto = (4)

Ahora bien, si queremos afirmar la primera proposición, hay que considerar el caso (1) o el caso (3), pero no los otros, es decir:

estoy alegre = (1) , (3) = (1,3)

análogamente:

canto = (1) , (2) = (1,2)

Y si queremos negar la primera, hay que considerar el caso (2) o el (4), y sólo éstos, es decir:

no estoy alegre = (2) , (4) = (2,4)

y análogamente:

$$\text{no canto} = (3), (4) = (3,4).$$

Estos dos últimos conjuntos son contradictorios de los dos primeros, como era de esperar. De todo lo dicho se desprende que podemos seguir el mismo método utilizado para los conceptos: traducir siempre las dos proposiciones primitivas, cualesquiera que sean, por (1,3) y por (1,2); y a partir de estos dos conjuntos de números obtendremos matemáticamente la escritura numérica de todas las proposiciones derivadas de aquellas dos. Vamos a obtener, por lo tanto, una escritura numérica para las proposiciones que es la misma que para los conceptos, pero la interpretación que se da a los números es ciertamente distinta: en los conceptos cada número significa uno de los cuatro conjuntos de individuos mencionados en II-4, mientras que en las proposiciones significa uno de los cuatro casos que estamos considerando. Estos casos coinciden con los que la Lógica matemática considera al estudiar los llamados "valores de verdad", que se representan mediante un conjunto ordenado de cuatro letras mayúsculas que pueden ser solamente la V o la F, y que indican que una proposición compuesta es verdadera en el caso primero, si tiene una V en el primer lugar; en el segundo caso, si la tiene en segundo lugar, etc. Así por ejemplo (1,3), que es verdadera en el primero y tercer caso, tiene los valores de verdad (VFVF), y (1,2) tiene los valores de verdad (VVFF). Es decir la escritura numérica nos da de un modo inmediato los valores de verdad, pues los números indican los lugares que ocupa la letra V. Por ejemplo: (1) tiene los valores de verdad (VFFF); (3), (FFVF); (1,3,4), (VFVV); (1,2,3,4), (VVVV); 0, (FFFF); etc.

5. Escritura numérica de las proposiciones compuestas.

A partir de dos proposiciones cualesquiera, por ejemplo "juegan" y "ríen", y de sus contradictorias "no jue-

gan" y "no ríen", se pueden obtener todas las proposiciones compuestas combinándolas, dos a dos, mediante conjunciones. Por tanto la escritura numérica de una proposición compuesta se obtiene traduciendo las dos primitivas por (1,3) y (1,2); las frases negativas "es falso que", "no es cierto que", o la partícula "no", por el símbolo "menos"; y las conjunciones por un punto, una coma o un punto y coma, según que se trate de la "y", la "o", o la "o...o". Y finalmente se calculan las operaciones indicadas con estos símbolos para obtener un solo conjunto como resultado final. También ahora consideramos por comodidad conjuntos ordenados, por tanto hay que escribir siempre los números de menor a mayor.

Por ejemplo:

$$\text{juegan y rien} = (1,3) \cdot (1,2) = (1)$$

$$\text{no juegan y ríen} = -(1,3) \cdot (1,2) = (2,4) \cdot (1,2) = (2)$$

$$\text{juegan o ríen} = (1,3) \cdot (1,2) = (1,2,3)$$

$$\text{juegan o no ríen} = (1,3) \cdot -(1,2) = (1,3) \cdot (3,4) = (1,3,4)$$

$$\text{o juegan o ríen} = (1,3) \cdot (1,2) = (2,3)$$

$$\text{o no juegan o ríen} = -(1,3) \cdot (1,2) = (2,4) \cdot (1,2) = (1,4).$$

Si la proposición compuesta tiene una conjunción diferente de las tres que estamos considerando, hay que cambiarla, como enseña la Lógica matemática, por:

a) una "y", si es adversativa (pero, aunque, etc.) o continuativa (ahora bien, así que, etc.). Por ejemplo:

$$\text{Hace sol, pero hace frío} = \text{Hace sol y hace frío}$$

b) una "o", y un "menos" en la primera primitiva, si es condicional (si, ...entonces, con tal que, siempre que, etc.) o cualquier otra conjunción que sea lógicamente igual al condicional: final (para, a fin de, a causa de, etc.), modal (como, como sí, de manera que, etc.), temporal (cuando,

do), consecutiva (luego, por lo tanto, por consiguiente, etc.). Por ejemplo:

Si vienes, te lo diré = no vienes o te lo diré =
 $\neg(1,3)$, $(1,2) = (2,4)$, $(1,2) = (1,2,4)$.

Si la conjunción es causal (porque, puesto que, etc.) pasa a condicional cambiando el orden de las proposiciones. Por ejemplo:

Te lo diré, porque vienes = si vienes, te lo diré.

c) una "o...o", y un "menos" en la primera primitiva, si es bicondicional (si y sólo si). Por ejemplo:

Si y sólo si vienes, te lo diré = o no vienes, o te lo diré.

Una vez que ya sabemos escribir numéricamente cualquier proposición, primitiva o derivada, ya estamos en condiciones de abordar todos los problemas lógicos que puedan plantear tales proposiciones. Veamos los problemas que ya han sido resueltos por la Lógica matemática y algunos otros no resueltos todavía que nos parecen de especial interés.

6. *Proposiciones compuestas contradictorias. Leyes de DE MORGAN.*

La operación mental de negar una contradicción se complica cuando se trata de una proposición compuesta. Este problema se resuelve, en algunos casos, por las *leyes de DE MORGAN* para proposiciones, que tienen una formulación parecida a la ya citada para conceptos. Por ejemplo, según estas leyes, la contradictoria de "corre y salta" es "no corre o no salta", y la contradictoria de "corre o salta" es "no corre y no salta".

Por el *método de los conjuntos numéricos* se obtiene una solución completa: *dos proposiciones, simples o com-*

puestas, son contradictorias, si y sólo si sus escrituras numéricas lo son. Como ejercicio, comprobemos los ejemplos anteriores:

$$\begin{aligned}\text{corre y salta} &= (1,3) \cdot (1,2) = (1) \\ \text{no corre o no salta} &= \neg(1,3) \vee \neg(1,2) = (2,4) \vee (3,4) \\ &= (2,3,4)\end{aligned}$$

(Son, en efecto, contradictorias, porque (1) y (2,3,4) lo son)

$$\begin{aligned}\text{corre o salta} &= (1,3) \vee (1,2) = (1,2,3) \\ \text{no corre y no salta} &= \neg(1,3) \cdot \neg(1,2) = (2,4) \cdot (3,4) \\ &= (4)\end{aligned}$$

(Son, en efecto, contradictorias, porque (1,2,3) y (4) lo son).

7. *Proposiciones equivalentes. Leyes de la Lógica de proposiciones. Tablas de verdad.*

Algunas *leyes de la Lógica de proposiciones* expresan la equivalencia o igualdad entre dos proposiciones; es decir, afirman que son una misma proposición, aunque sea distinta la forma gramatical de escribirlas. Sin embargo no consideran todas las equivalencias posibles. Una solución general a este problema se obtiene con los *valores de verdad*: dos proposiciones son equivalentes, si tienen los mismos valores de verdad. Para hallar estos valores se usan las llamadas *tablas de verdad*, que pueden verse en cualquier libro elemental de Lógica matemática. Son sencillos y no requieren conocimientos filosóficos o matemáticos previos; sin embargo, se limitan a resolver este único problema y no son propiamente un método, ya que no simplifican el pensamiento, sino solamente una manera de ordenar los resultados parciales obtenidos por razonamiento directo.

Numéricamente se obtiene también una solución general: *dos proposiciones son iguales, si tienen la misma escritura numérica.* Como ejemplo, vamos a comprobar las leyes de la Lógica de proposiciones que son paralelas a las leyes de BOOLE mencionadas en II-7:

- a) ley de identidad: $\text{hace sol} = \text{hace sol}, (1,3) = (1,3)$
- b) ley de contradicción:
 $\text{paseo y no paseo} = (1,3) \cdot \neg(1,3) = (1,3) \cdot (2,4) = 0$
- c) ley del tercio excluido:
 $\text{voy o no voy} = (1,3), \neg(1,3) = (1,3), (2,4) = (1,2,3,4)$
- d) ley de la doble negación:
 $\text{dudas} = (1,3)$
 $\text{es falso que no dudas} = \neg(\neg(1,3)) = \neg(2,4) = (1,3)$
- e) ley conmutativa:
 $\text{llueve y hace frío} = (1,3) \cdot (1,2) = (1)$
 $\text{hace frío y llueve} = (1,2) \cdot (1,3) = (1)$

8. *Proposiciones diferentes.*

El problema de averiguar si dos proposiciones son diferentes entre sí no se puede resolver con las leyes de la Lógica proposicional, puesto que no abarcan todos los casos posibles de igualdades entre proposiciones. Los *valores de verdad* resuelven este problema: dos proposiciones son diferentes, si lo son sus valores de verdad.

También *numéricamente* se resuelve el problema en toda su generalidad: *dos proposiciones son diferentes si tienen escritura numérica diferente*. Por tanto a cada proposición le corresponde una escritura numérica propia y exclusiva, como ocurre con los conceptos según vimos en II-8. Por lo tanto el lenguaje numérico sigue manteniendo también para las proposiciones su condición de *lenguaje función*.

9. *Número total de proposiciones diferentes.*

El problema lógico, más complejo que el anterior, de hallar todas las proposiciones diferentes, con mayor razón tampoco se puede resolver mediante leyes. Con los *valo-*

res de verdad se podría lograr, calculando el número de conjuntos ordenados diferentes de cuatro letras que se pueden formar utilizando la V y la F.

Más sencillo resulta con los conjuntos de números, como ya se vió en II-9. Vamos, como ejemplo, a escribir todas las proposiciones diferentes, manteniendo el mismo orden que en los conceptos. Sean las proposiciones primitivas "come" y "habla" y sus contradictorias "no come" y "no habla", es decir "calla"; por consiguiente:

1. come y habla = $(1,3) \cdot (1,2) = (1)$
2. no come y habla = $-(1,3) \cdot (1,2) = (2,4) \cdot (1,2) = (2)$
3. come y calla = $(1,3) \cdot -(1,2) = (1,3) \cdot (3,4) = (3)$
4. no come y calla = $-(1,3) \cdot -(1,2) = (2,4) \cdot (3,4) = (4)$
5. habla = $(1,2)$
6. come = $(1,3)$
7. o come o calla = $(1,3) ; -(1,2) = (1,3) ; (3,4) = (1,4)$
8. o come o habla = $(1,3) ; (1,2) = (2,3)$
9. no come = $-(1,3) = (2,4)$
10. calla = $-(1,2) = (3,4)$
11. come o habla = $(1,3) , (1,2) = (1,2,3)$
12. no come o habla = $-(1,3) , (1,2) = (2,4) , (1,2) = (1,2,4)$
13. come o calla = $(1,3) , -(1,2) = (1,3) , (3,4) = (1,3,4)$
14. no come o calla = $-(1,3) , -(1,2) = (2,4) , (3,4) = (2,3,4)$
15. come o no come = $(1,3) , -(1,3) = (1,3) , (2,4) = (1,2,3,4)$
16. come y no come = $(1,3) \cdot -(1,3) = (1,3) \cdot (2,4) = 0$.

Obsérvese que si excluimos las proposiciones 15 y 16 que son respectivamente una tautología (no dice nada) y una contradicción y que, como enseña la Lógica, deben eliminarse siempre de todo razonamiento, hay una relación entre las conjunciones y el número de elementos de cada conjunto, como ocurre también con los conceptos. Lo cual confirma que la estructura lógica con la que la mente combina conceptos es la misma que emplea para combinar proposiciones.

10. *Implicaciones. Leyes de simplificación.*

El problema, paralelo al resuelto en II-10, de averiguar si una proposición implica a otra (es decir, si de la verdad de la primera se puede deducir la verdad de la segunda) es de capital importancia para la Lógica y para todas las ciencias, pues toda deducción y todo razonamiento es siempre una implicación. Las *leyes de simplificación* resuelven los dos casos siguientes: dos proposiciones unidas por la “y” implican a una cualquiera de las dos, y una proposición implica a ésta unida mediante la “o” con otra cualquiera. Por ejemplo “trabajar y descansar” implica “trabajar” y también implica “descansar”, y por otra parte “trabajar” implica “trabajar o descansar”. Con los *valores de verdad* se resuelve este problema de un modo general: se considera la implicación como un condicional y se hallan los valores de verdad; si se obtiene (VVVV) es una implicación; de lo contrario, no lo es.

Con la *escritura numérica* se obtiene una contestación general e inmediata a este problema: *una proposición implica a otra, si la escritura numérica de la primera está contenida en la escritura numérica de la segunda*. En efecto, si una proposición es verdadera, también lo es por lo menos uno de los conjuntos unitarios que la componen. Por ejemplo, decir que la proposición (1,3,4) es verdadera es lo mismo que decir que lo es la (1) o la (3) o la (4), pues $(1), (3), (4) = (1,3,4)$

Por tanto cualquier otra proposición que contenga a todos los números de la proposición anterior, contendrá naturalmente a uno por lo menos que es verdadero, luego es verdadera.

Comprobemos, como ejercicio, los ejemplos anteriores:

$$\text{trabajar y descansar} = (1,3) \cdot (1,2) = (1)$$

$$\text{trabajar} = (1,3)$$

$$\text{descansar} = (1,2)$$

$$\text{trabajar o descansar} = (1,3) \vee (1,2) = (1,2,3)$$

Como se ve, (1) implica a (1,3) y a (1,2); y a su vez éstos dos implican a (1,2,3). Otros muchos ejemplos se pueden obtener fácilmente mirando las dieciséis proposiciones del apartado anterior. Por ejemplo, el número cuatro (no come y calla), cuya escritura numérica es (4), implica a cualquier proposición cuya escritura numérica contenga un cuatro: la 7 (o come o calla), la 9 (no come), la 10 (calla), la 12 (no come o habla), la 13 (come o calla), la 14 (no come o calla) y la 15 (una tautología).

11. *Simplificación de proposiciones. Método de Post. Deducción proposicional. Fórmulas normales de HILBERT y ACKERMANN.*

El problema lógico de simplificar una proposición para darle una expresión gramatical más sencilla de la que tiene se puede resolver con las *leyes proposicionales* que establecen equivalencias en aquellos pocos casos en que la proposición dada (o una parte de ella) coinciden con uno de los dos miembros (antecedente o consecuente) de la equivalencia y además es menos simple que el otro miembro. También los *valores de verdad* de una proposición pueden sugerir una manera más sencilla de escribir por tanteo una proposición que tenga esos mismos valores. Para hallar sin tanteos una proposición que tenga unos valores de verdad dados, problema inverso del que resuelven las tablas de verdad, EMIL POST encontró un método general: forma cuatro proposiciones, que llama "proposiciones elementales" y que son las cuatro primeras de las consideradas por nosotros en III-9 (conjuntos unitarios) y asocia cada una a los lugares primero, segundo, tercero o cuarto que pueden ocupar las letras V en los valores de verdad, y finalmente escribe separadas por la conjunción "o" tantas proposiciones elementales como letras V hay en los valores de verdad dados y precisamente aquellas que están asociadas con los lugares que ocupan las letras V. Este método es general, pero a veces en vez de simplificar una proposición la complica y además necesita obtener antes

los valores de verdad, lo que no es posible con el uso de las *tablas* si la proposición es muy compleja. Cabe entonces intentar un método llamado "deducción proposicional" que consiste en aplicar sucesivamente a la proposición dada las leyes proposicionales que convenga hasta conseguir transformarla en otra más simple.

La simplificación de proposiciones tiene especial interés cuando se sospecha que hay una contradicción o una tautología. La deducción proposicional permite a lo sumo averiguar que una proposición es una contradicción o una tautología, pero no aseguran que no lo sea, ya que si no se consigue encontrar una deducción no hay razón para pensar que no se pueda. Para superar las limitaciones de la deducción proposicional HILBERT y ACKERMANN han ideado el procedimiento de las *fórmulas normales*, que permiten asegurar que una proposición es *consistente*, es decir que no es una contradicción. Para ello se transforma la proposición dada mediante las leyes proposicionales hasta que se consiga que entre dos proposiciones simples haya siempre una "y", y que entre estas proposiciones compuestas, que se les llama *conjunciones puras*, haya una "o"; a continuación se aplica el *criterio de discernimiento* que dice que la proposición dada no es una contradicción si ninguna conjunción pura lo es (una conjunción pura es una contradicción cuando afirma y niega una misma cosa a la vez; por ejemplo: llueve y no llueve). También las *fórmulas normales* permiten asegurar que una proposición que expresa un razonamiento es válida, es decir es una tautología (VVVV). Para ello se transforma la proposición dada mediante leyes proposicionales hasta conseguir que entre dos proposiciones simples haya siempre una "o" y que entre estas proposiciones compuestas, que se les llama *disyunciones puras*, haya una "y"; a continuación se aplica el *criterio de discernimiento* que dice que la proposición dada es una tautología si todas las disyunciones puras lo son (una disyunción pura es una tautología cuando afirma o niega la misma cosa; por ejemplo: llueve o no llueve).

Con el *lenguaje numérico* se obtiene la mayor simpli-

ficación posible de cualquier proposición por compleja que sea, pues como la estructura lógica de una proposición se traduce por operaciones, una estructura compleja se manifiesta en que aparecen muchas operaciones, que al efectuarlas todas, la proposición queda totalmente simplificada. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} &\text{o "come y habla" o "no come y no habla"} = \\ &\quad ((1,3) \cdot (1,2)) ; (-(1,3) \cdot -(1,2)) = \\ &\quad (1) ; ((2,4) \cdot (3,4)) = (1) ; (4) = (1,4) = \text{o come} \\ &\quad \text{o calla} \end{aligned}$$

(Véase la proposición 7 de II-9)

$$\begin{aligned} &\text{"No come o calla" y "come o habla"} = \\ &\quad (-(1,3) , -(1,2)) \cdot ((1,3) , (1,2)) = \\ &\quad ((2,4) , (3,4)) \cdot (1,2,3) = (2,3,4) \cdot (1,2,3) = (2,3) = \\ &\quad \text{o come o habla} \end{aligned}$$

(Véase la proposición 8 de II-9).

Si al escribir numéricamente una proposición se obtiene el conjunto vacío es una contradicción; de lo contrario, es una proposición *consistente*. Y si al escribir una proposición que expresa un razonamiento se obtiene el conjunto universal, (1,2,3,4), es una tautología; es decir, es un razonamiento *válido*.

12. Traducción a palabras de un conjunto de números.

Nos queda por ver la última etapa del cálculo: la traducción a palabras de los conjuntos de números. Se procede naturalmente de manera análoga a lo dicho en II-12 para los conceptos:

Primero: Se comprueba si la proposición es simple o compuesta. Son simples, como se sabe, las proposiciones primitivas, (1,3) y (1,2), y sus contradictorias, (2,4) y (3,4), y solamente ellas. En este caso la traducción a palabras es inmediata.

Segundo: Si la proposición es compuesta, se escriben las dos proposiciones simples separadas por una "y", si el conjunto tiene un solo número; por una "o...o", si tiene dos; y por una "o", si tiene tres.

Tercero: Finalmente, se antepone un "no" al verbo de la proposición simple cuyo conjunto no contiene ni es contenido por el conjunto dado. Si el sujeto de la proposición simple está cuantificado (si va precedido de "todos", "los", "algunos") en vez de la partícula "no" se antepone a la proposición "es falso que". Y cuando el conjunto tiene dos números, se prescinde del segundo número antes de aplicar este tercer paso.

Por ejemplo, si las proposiciones primitivas son "paga" y "cobra" resulta que:

$$(3,4) = \neg(1,2) = \text{no paga.}$$

$(2) = \text{no paga y cobra}$ (se pone la "y" porque tiene un solo número, y se pone el "no" porque el 2 no está en $(1,3)$).

$(2,3) = \text{o no paga o cobra}$ (se pone la "o...o" porque tiene dos números y no es ni el $(1,3)$, ni el $(1,2)$, ni sus contradictorios; y se pone el "no" porque prescindiendo del segundo número queda el 2 que no está en $(1,3)$).

$(1,3,4) = \text{paga o no cobra}$ (se pone la "o" porque tiene tres números; y se pone el "no" porque $(1,2)$ que es "cobra" no está en $(1,3,4)$).

Conclusión.

Para terminar este trabajo nos interesa destacar que la importancia del *método de los conjuntos de números* que hemos presentado no se limita a haber dado una solución general y sencilla a los numerosos problemas que acabamos de ver, ni tampoco se limita a haber unificado en un solo procedimiento los diferentes métodos parciales mencionados en estas páginas, pues lo verdaderamente in-

interesante es que hemos encontrado un lenguaje simbólico que resuelve automáticamente los problemas lógicos sin necesidad de planteárselos y que cumple todas las leyes lógicas sin necesidad de tenerlas en cuenta.

Por tanto la solución *numérica* de los múltiples problemas estudiados en estas páginas ha servido de ejercicio para explicar el método y para dar confianza al lector, pero lo importante es que hemos dado los dos primeros pasos para obtener un *lenguaje numérico*, que simplifique el razonamiento humano. Hemos aprendido, concretamente, a escribir con números los conceptos y a calcular numéricamente las conjunciones, tanto si unen conceptos como proposiciones, de forma que ya está abierto el camino para poder obtener un lenguaje numérico completo. Reservamos para nuestra próxima publicación el estudio del paso siguiente: la escritura numérica de los verbos.

**SOBRE LA PERENNIDAD
DE LAS IDEAS FILOSOFICAS**

WOLFGANG STROBL