Fórmula generalizada de Taylor

FAUSTINO N. GIMENA RAMOS, DR. ARQUITECTO

***RESUMEN.** Se generaliza la fórmula de Taylor y a partir de esta generalización, como casos particulares, se deducen las fórmulas de Taylor y Mac-Laurin, el teorema general del valor medio, el teorema de Rolle y la regla de l´Hopital.*

***SUMMARY.** Taylor's formula is generalized and from this generalization, as specific cases, Taylor's and Maclaurin's formulas are deduced in addition to the general theorem of the average value, Rolle's theorem and L'Hopital rule.*

INDICE GENERAL

1. INTRODUCCION

En análisis matemático se tiende a expresar funciones como polinomios, ya que éstas son funciones sencillas. En casos particulares interesa qué funciones sean suma de otras, aunque éstas no sean polinomios. Esta última aproximación es la que nos va a proporcionar una fórmula de partida, con la cual se demuestran las fórmulas de Taylor, Mac-Laurin, los teoremas de Cauchy, Rolle y la regla de l´Hopital.

2. FORMULA GENERAL DE TAYLOR

Dadas las funciones $F(x)$ y $G(x)$ definidas y continuas en el intervalo (a,b) y derivables hasta orden (n+1) en el intervalo (a,b) y una función $R(x)$ definida y continua en (a,b), se puede deducir que:

$$F(x) = F(\xi) + \frac{F'_G(\xi)}{1!}\left[G(x) - G(\xi)\right] + \dots +$$

$$+ \frac{F^n_G(\xi)}{n!}\left[G(x) - G(\xi)\right]^n + \frac{R(x)}{(n+1)!}\left[G(x) - G(\xi)\right]^{n+1}$$

La demostración es inmediata, derivando respecto de $G(x)$ y particularizando en $x = \xi$ perteneciente al intervalo (a,b). Si la función $G(x)$ es igual a x, se deduce la fórmula de Taylor.

3. TEOREMA GENERAL DEL VALOR MEDIO

De la fórmula general de Taylor, en el caso que $n = 1$

$$F(x) = F(\xi) + R(x)\left[G(x) - G(\xi)\right]$$

Se obtiene, derivando respecto $G(\xi)$, que:

$$0 = \frac{d F(\xi)}{d G(\xi)} - R(x)$$

por tanto:

$$F(x) = F(\xi) + \frac{d F(\xi)}{d G(\xi)}\left[G(x) - G(\xi)\right]$$

particularizando para $x = b$, $x = a$, y restando las dos expresiones se deduce que:

$$F(b) - F(a) = \frac{d\,F(\xi)}{d\,G(\xi)}\left[G(b) - G(a)\right]$$

luego:

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

expresión que representa el teorema del valor medio generalizado. Como caso particular, cuando la función $G(x)$ es igual a x, se deduce el teorema del valor medio:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi)$$

4. TEOREMA DE ROLLE

Del teorema del valor medio, se puede demostrar el teorema de Rolle. En el caso que $F(b) = F(a)$, se deduce que existe un punto ξ perteneciente al intervalo (a, b) en que $F'(\xi) = 0$.

5. REGLA DE L' HOPITAL

Para obtener el límite entre el cociente de las funciones $F(x)$ y $G(x)$ cuando x tiende a ξ siempre que los límites de $F(x)$ y de $G(x)$ cuando x tiende a ξ sean nulos, se puede realizar las siguientes operaciones:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{F(x) - F(\xi)}{G(x) - G(\xi)} = \lim_{x\to\xi} \frac{F'(x)}{G'(x)}$$

deducidas del teorema generalizado del valor medio que se expresan en la Regla de l' Hopital.

6. CONCLUSIONES

- Obtención de una nueva fórmula general de Taylor.
- Las demostraciones de la fórmula de Taylor, de los teoremas de valor medio, de Rolle y de la regla de l'Hopital son deducidas de la fórmula general.
- El método de enseñanza es más sencillo que el actual.