Revista de Edificación. **RE** • Nº 14 • **Junio 1993**

Obtención del centro de gravedad de una línea alabeada sin sistema de referencia

FAUSTINO N. GIMENA RAMOS, DR. ARQUITECTO

RESUMEN. ***Para determinar el centro de gravedad de una línea alabeada es necesario utilizar un sistema de referencia.***
Este procedimiento es el único que existe en la actualidad. Las coordenadas del centro de gravedad de una línea alabeada son intrínsecas a ésta, es decir, son independientes del sistema de referencia utilizado para obtenerlas.
En este artículo se obtienen las coordenadas del centro de gravedad de una línea alabeada utilizando como sistema de referencia el triedro intrínseco de Frenet, el cual solo depende de las ecuaciones intrínsecas de la línea y no de un sistema de referencia elegido arbitrariamente.

SUMMARY. To determine the center of gravity of a warped line a system of reference is needed.
This is the only procedure which currently exists. The coordinates of the center of gravity of a warped line are inherent to it; they are independent of the system of reference used to obtain them.
In this article the coordinates of the center of gravity of a warped line are obtained using as a system of reference Frenet's intrinsic trihedral angle which only depends on the inherent equations of the line and not on an arbitrary sistem of reference.

INDICE GENERAL

1. INTRODUCCION

Se define centro de gravedad como el punto del espacio en que se pueden contrarrestar, con una fuerza vertical, todas las de la gravedad que actúan en la línea.

De esta definición se podría concluir que según la posición relativa de la línea con respecto a los ejes, el centro de gravedad es diferente, porque lo son las fuerzas verticales que actúan sobre la línea. Las coordenadas del centro de gravedad de una línea depende únicamente de la masa de ésta.

Para determinar las coordenadas del centro de gravedad de una línea será necesario obtener los momentos de orden nulo y los de primer orden, definiendo por momento de orden n el producto de la distancia elevada a n por la masa.

2. TRIEDROS INTRINSECOS

Según se considere el sentido positivo del diferencial de arco en una línea alabeada, nos define el sentido de la tangente, normal principal, y binormal en un punto de ésta. Por tanto hay dos triedros intrínsecos asociados en un punto a una línea alabeada.

Se considera la línea alabeada entre dos extremos **I** y **II** correspondientes a $s = 0$ y $s = l$ o al contrario, según sea el sentido positivo del diferencial de arco.

3. RELACION ENTRE DOS TRIEDROS INTRINSECOS INFINITAMENTE PROXIMOS

El triedro intrínseco asociado al punto P de la directriz $\{t\}$, $\{n\}$, $\{b\}$, con el triedro intrínseco asociado al punto P_1 de la directriz, que dista de P ds, $\{t_1\} = \{t\} + d\,\{t\}$, $\{n_1\} = \{n\} + d\,\{n\}$, $\{b_1\} = \{b\} + d\,\{b\}$ se relacionan por la expresión matricial:

$$\{\{t_1\}, \{n_1\}, \{b_1\}\} = \{\{t\}, \{n\}, \{b\}\} \begin{pmatrix} 1 & -\chi\, ds & 0 \\ \chi\, ds & 1 & -\varphi\, ds \\ 0 & \varphi\, ds & 1 \end{pmatrix}$$

basada en las fórmulas de FRENET - SERRET.

χ Curvatura de la línea alabeada.

φ Alabeo de la línea alabeada (llamado impropiamente curvatura de torsión).

4. ECUACIONES DE MOMENTOS

En el equilibrio del elemento de línea intervienen los siguientes sistemas:

Momentos en el punto P de la línea:

$$-\{M\}_t = -\{\{M^0\}, \{M^1\}\}_t$$

siendo:

$\{M^0\} = \{M_t^0, M_n^0, M_b^0\}$ Momento de orden nulo respecto al triedro intrínseco.

$\{M^1\} = \{M_t^1, M_n^1, M_b^1\}$ Momento de primer orden respecto al triedro intrínseco.

Momentos en el punto P_1 de la línea:

$$\{M_1\}_{t\,1} = \{M\}_{t\,1} + d\,\{M\}_{t\,1}$$

Densidad lineal en el punto P_2 intermedio de los puntos P y P_1 sobre la línea:

$$\{\rho\}_{t\,2}\, ds = \{\rho_t, \rho_n, \rho_b, 0, 0, 0\}_{t\,2}\, ds$$

El equilibrio entre los tres sistemas tiene la expresión:

$$-\{M\}_t + \{M_1\}_{t\,1}\,(C)_6 + \{r\}_{t\,2}\, ds = 0 \qquad [4.1]$$

siendo:

$(C)_6$ Matriz de traslado de un sistema de seis componentes desde el triedro en P al triedro en P_1, dada por:

$$(C)_6 = \begin{pmatrix} (A)_3 & (B)_3 \\ (0)_3 & (A)_3 \end{pmatrix}$$

$(A)_3$ Matriz de cambio del triedro dada por:

$$(A)_3 = \begin{pmatrix} 1 & \chi\, ds & 0 \\ -\chi\, ds & 1 & \varphi\, ds \\ 0 & -\varphi\, ds & 0 \end{pmatrix}$$

$(B)_3$ Matriz complementaria de traslado del punto P_1 al punto P, dada por:

$$(B)_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ds \\ 0 & -ds & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la ecuación [4.1], dividiendo por ds y eliminando infinitésimos de orden superior se obtiene la ecuación diferencial de los momentos, cuyas componentes, con el operador de derivación $D = d/ds$, son: [4.2]

$$\begin{aligned}
D\, M_t^0 - \chi\, M_n^0 \qquad\qquad & + \rho_t = 0 \\
\chi\, M_t^0 + D\, M_n^0 - \varphi\, M_b^0 \quad & + \rho_n = 0 \\
\varphi\, M_n^0 + D\, M_b^0 \qquad & + \rho_b = 0 \\
D\, M_t^1 - \chi\, M_n^1 \qquad & = 0 \\
-\, M_b^0 + \chi\, M_t^1 + D\, M_t^0 - \varphi\, M_b^1 \quad & = 0 \\
M_n^0 \qquad + \varphi\, M_n^1 + D\, M_b^1 \quad & = 0
\end{aligned}$$

Sabiendo que las condiciones de contorno son $\{M\,(0)\}_t = \{0\}_t$ quedan determinados los momentos en cualquier punto de la línea alabeada.

5. COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD

Se determina el eje central del sistema o lugar geométrico de los puntos del espacio donde los momentos de primer orden producidos por el vector $\{M\,(l)\}$ son nulos.

Según se considere extremo I y II o al contrario, se obtiene dos ejes centrales del sistema:

$$\{r\}_t^1 \wedge \{M^0\,(l)\}_t^1 = \{M^1\,(l)\}_t^1 \qquad \text{Primer eje central}$$

$$\{r\}_t^2 \wedge \{M^0\,(l)\}_t^2 = \{M^1\,(l)\}_t^2 \qquad \text{Segundo eje central}$$

La intersección de los ejes centrales del sistema determinan las coordenadas del centro de gravedad.

6. CONCLUSIONES

El cálculo del centro de gravedad de una línea es independiente del sistema de referencia elegido.

Las coordenadas del centro de gravedad son intrínsecas a la línea.

Si se selecciona el triedro intrínseco como sistema de referencia, que a su vez no depende del sistema de referencia elegido, se puede determinar las coordenadas intrínsecas del centro de gravedad. Este procedimiento de cálculo aunque es más complicado que el tradicional, tiene la ventaja que únicamente se necesita conocer las ecuaciones intrínsecas de la línea alabeada.