Revista de Edificación. RE • Nº 13 • Marzo 1993

Elemento diferencial de volumen, área y línea

FAUSTINO N. GIMENA RAMOS, DR. ARQUITECTO

RESUMEN. ***Tanto el elemento diferencial de área como el elemento diferencial de línea, pueden ser considerados casos particulares del elemento diferencial de volumen. Partiendo de las ecuaciones paramétricas del volumen, la obtención de su elemento diferencial es inmediata, en consecuencia también es inmediata la obtención de los elementos diferenciales de área y línea.***
A partir de los elementos diferenciales generales se puede determinar cualquier caso particular, por ejemplo, cuando las ecuaciones vienen dadas en su forma cartesiana.
En los cambios de variable en integrales triples, dobles, o simples, siempre hay que multiplicar el producto de los diferenciales por el jacobiano de la transformación.
El método de enseñanza es más sencillo, ya que desde lo general, cuya obtención no es complicada, se llega a lo particular.

SUMMARY. The differential element in area as well as the differential element in the baseline can be considered as specific cases of the differential element in volume.
Beginning with parametrical equations of volume, obtaining its differential element is immediate. Thus, obtaining the differential elements of area and baseline is also immediate.
Starting with general differential elements, any specific case can be determined as when equations are given in their Cartasen from.
In the changes of triple integral variables, double or triple, the product of the differentials always has to be multiplied by the Jacobean of the transformation.
The teaching method is less difficult since from the whole, obtaining it uncomplicated and the particularity is reached.

INDICE GENERAL

1. INTRODUCCION

La mayoría de los autores matemáticos para explicar el elemento diferencial de volumen, área y línea parten de unas ecuaciones cartesianas. Entonces el elemento de volumen es el producto de los tres diferenciales, el elemento de área el producto de dos diferenciales y el elemento de linea el módulo del diferencial del vector de posición. De esta forma se deducen las fórmulas generales del elemento de volumen, área y arco por medio de los elementos anteriormente obtenidos, efectuando en ellos un cambio de variable. Este cambio de variable lleva una demostración laboriosa y complicada.

En el artículo se obtiene directamente las fórmulas generales del elemento de volumen, área y linea a partir de unas ecuaciones paramétricas y como caso particular se determinará el elemento de volumen, área y línea cuando las ecuaciones vienen dadas en forma cartesiana.

2. ELEMENTO DE VOLUMEN

Ecuación de un volumen en forma paramétrica o vectorial:

$$\vec{r} = x\left(u,v,w\right)\vec{i} + y\left(u,v,w\right)\vec{j} + z\left(u,v,w\right)\vec{k}$$

Los valores diferenciales parciales del vector de posición son:

$$d_u\vec{r} = (x'_u\vec{i} + y'_u\vec{j} + z'_u\vec{k})du$$
$$d_v\vec{r} = (x'_v\vec{i} + y'_v\vec{j} + z'_v\vec{k})dv$$
$$d_w\vec{r} = (x'_w\vec{i} + y'_w\vec{j} + z'_w\vec{k})dw$$

Estos vectores representan las aristas concurrentes de un paralelepípedo elemental. El elemento de volumen es el triple producto escalar o producto mixto (según la Geometría Analítica) de los vectores diferenciales parciales del vector de posición:

$$dV = \left(d_u\vec{r}, d_v\vec{r}, d_w\vec{r}\right) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} dudvdw$$

De esta manera se obtiene la fórmula general del elemento de volumen, bien conocida en Matemáticas, el jacobiano por los diferenciales.

Como caso particular, cuando los parámetros u, v, w coinciden con x, y, z se obtiene el elemento de volumen en cartesianas. De aquí se deduce que:

$$dxdydz = J\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} dudvdw$$

Esto implica que, cuando se efectúa un cambio de variable en integrales triples se tiene que multiplicar los diferenciales por el jacobiano de la transformación.

3. ELEMENTO DEL AREA

El elemento del área es un caso particular del elemento de volumen. Una arista del paralelepípedo elemental es un vector unitario perpendicular a las otras dos aristas. El elemento de área es :

$$dA = \left(d_u\vec{r}, d_v\vec{r}, \vec{n}\right)$$

siendo:

$$\vec{n} = \frac{d_u\vec{r} \wedge d_v\vec{r}}{\left| d_u\vec{r} \wedge d_v\vec{r} \right|}$$

por tanto, el elemento diferencial de área es:

$$dA = \left(d_u\vec{r} \wedge d_v\vec{r}\right) \frac{d_u\vec{r} \wedge d_v\vec{r}}{\left| d_u\vec{r} \wedge d_v\vec{r} \right|} = \left| d_u\vec{r} \wedge d_v\vec{r} \right| =$$

$$= \sqrt{J\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}^2 + J\begin{pmatrix} y & z \\ u & v \end{pmatrix}^2 + J\begin{pmatrix} z & x \\ u & v \end{pmatrix}^2} dudv$$

Se obtiene el mismo resultado que si se hubiese definido como el módulo del producto vectorial de dos aristas del paralelogramo elemental.

Como caso particular, cuando los parámetros u, v coinciden con x, y, se obtiene el elemento de área en cartesianas cuyo valor es:

$$dA = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy$$

Cuando se trabaja en el plano XY el elemento de área es:

$$dA = dxdy = J\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} dudv$$

Esta fórmula establece el cambio de variable en integrales dobles.

El elemento de área de una superficie engendrada al girar una curva plana y = f (x) alrededor el eje X cuya ecuación tiene la expresión:

$$\vec{r} = x\vec{i} + f(x)\cos w\vec{j} + f(x)\operatorname{sen} w\vec{k}$$

ya integrado el diferencial de w es :

$$dA = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

En este último caso los dos vectores elementales son perpendiculares.

Todas las fórmulas del elemento de área son casos particulares de las fórmulas anteriormente citadas.

4. ELEMENTO DE LINEA

Así como el elemento de área es un caso particular de elemento de volumen, el elemento de línea es un caso particular del elemento de área y en consecuencia del elemento de volumen.

Dos aristas del paralelepípedo elemental son vectores unitarios perpendiculares entre sí y perpendiculares a la otra arista.

El elemento de línea es:

$$ds = \left(d_u\vec{r}, \vec{n}, \vec{b}\right)$$

Siendo:

$$\vec{n} \wedge \vec{b} = \frac{d_u\vec{r}}{\left| d_u\vec{r} \right|}$$

por tanto, el elemento diferencial de linea es:

$$ds = d_u\vec{r}\, \frac{d_u\vec{r}}{\left| d_u\vec{r} \right|} = \left| d_u\vec{r} \right| = \sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}\, du$$

Se obtiene el mismo resultado que si se hubiese definido el elemento de línea como el módulo del diferencial del vector de posición.

Análogamente al elemento de volumen y de área, cuando se está trabajando en el elemento de línea se obtiene el cambio de variable en integrales simples.

$$ds = dx = x'_u du = J\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du$$

5. CONCLUSIONES

- El método de enseñanza de los elementos diferenciales de volumen, área y línea es más sencillo.
- El elemento de volumen no necesita ser precisamente un paralelepípedo de caras paralelas a los planos coordenados.

• Hay una relación íntima entre los tres elementos, ya que los elementos de área y línea son casos particulares del elemento volumen.

• La demostración del cambio de variable en integrales triples, dobles y simples no es tan laboriosa como la actual.

• Las integrales triples, dobles y simples son casos particulares de las integrales de volumen, superficie y línea.